Capítulo 11

Análise em Regime Permanente C.A.

11.1 Análise Nodal

Relação tensão-corrente:

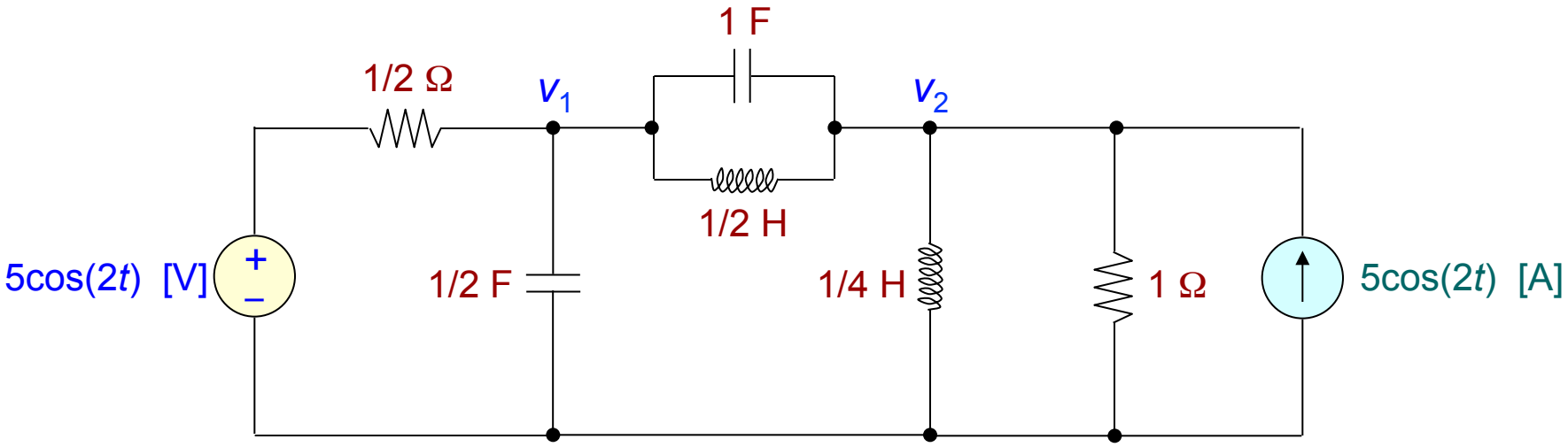
$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}\mathbf{I}$$

Diferença entre circuitos resistivos e fasoriais:

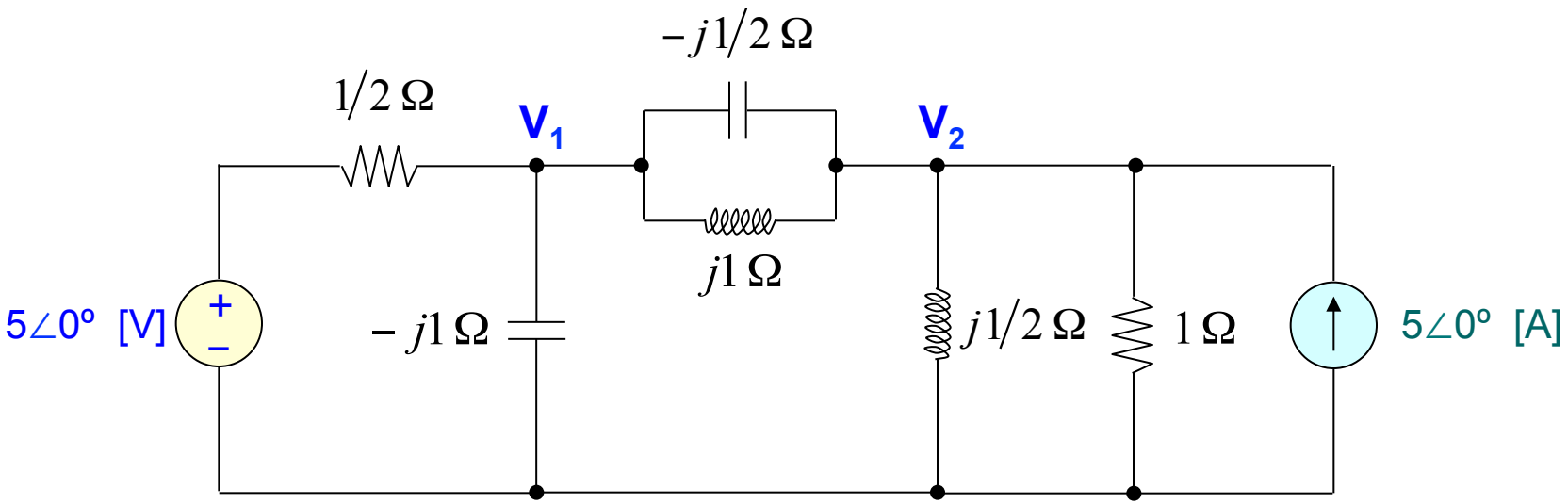
- as excitações e as respostas são complexas nos circuitos fasoriais.

Assim, os métodos de análise nodal e de malhas, ou de laços, podem ser utilizados em circuitos fasoriais.

Exemplo: Cálculo de v_1 e v_2 em regime permanente.



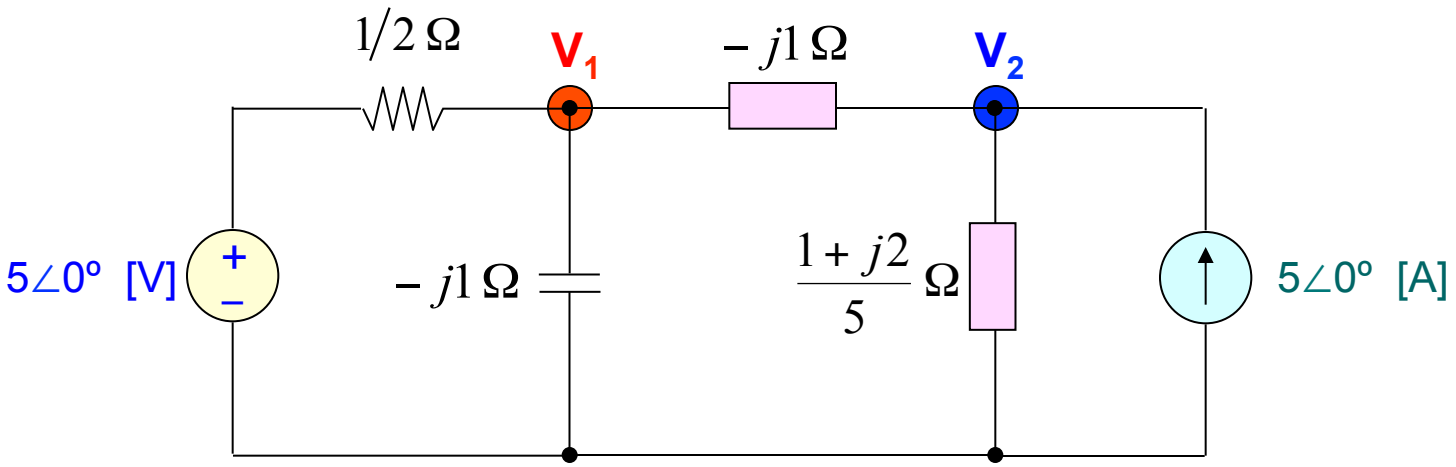
Circuito fasorial:



$$\mathbf{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C}$$

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L$$

Circuito simplificado:



Equações nodais:

$$\frac{\mathbf{V}_1 - 5\angle 0^\circ}{1/2} + \frac{\mathbf{V}_1}{-j1} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{-j1} = 0 \longrightarrow (2 + j2)\mathbf{V}_1 - j\mathbf{V}_2 = 10$$

$$\frac{\mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1}{-j1} + \frac{\mathbf{V}_2}{(1 + j2)/5} = 5\angle 0^\circ \longrightarrow -j\mathbf{V}_1 + (1 - j)\mathbf{V}_2 = 5$$

Resolvendo por determinantes:

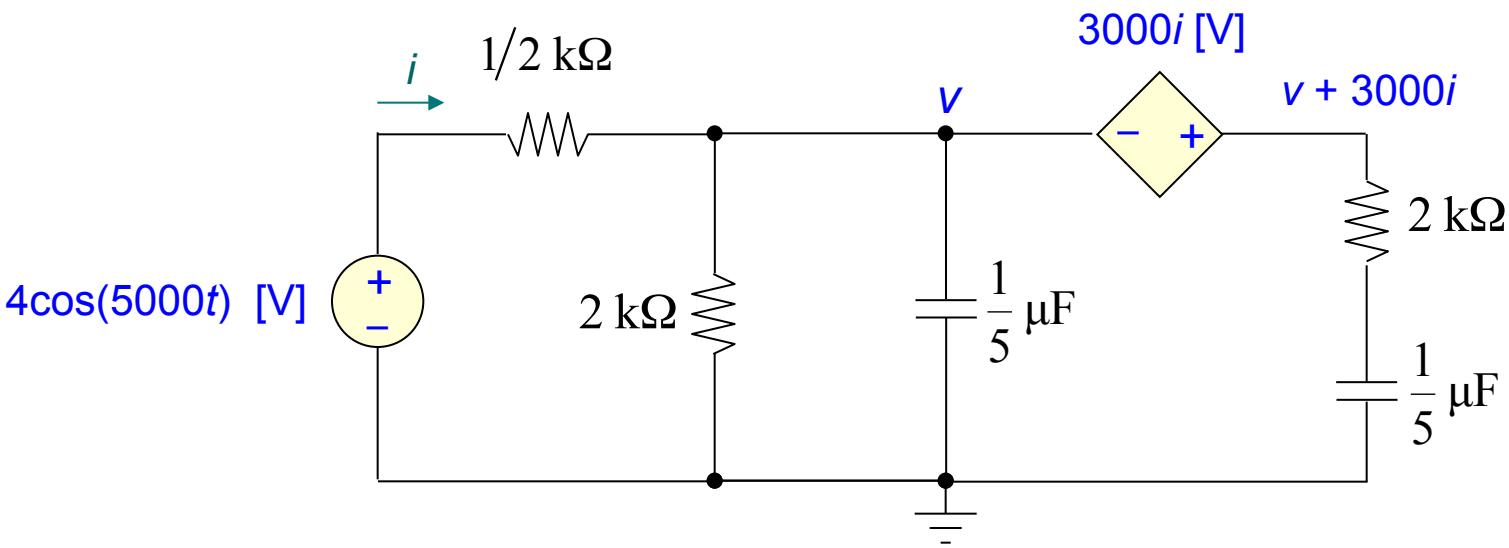
$$\mathbf{V}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -j \\ 5 & 1-j \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j2 & -j \\ -j & 1-j \end{vmatrix}} = \frac{10-j5}{5} = 2-j$$

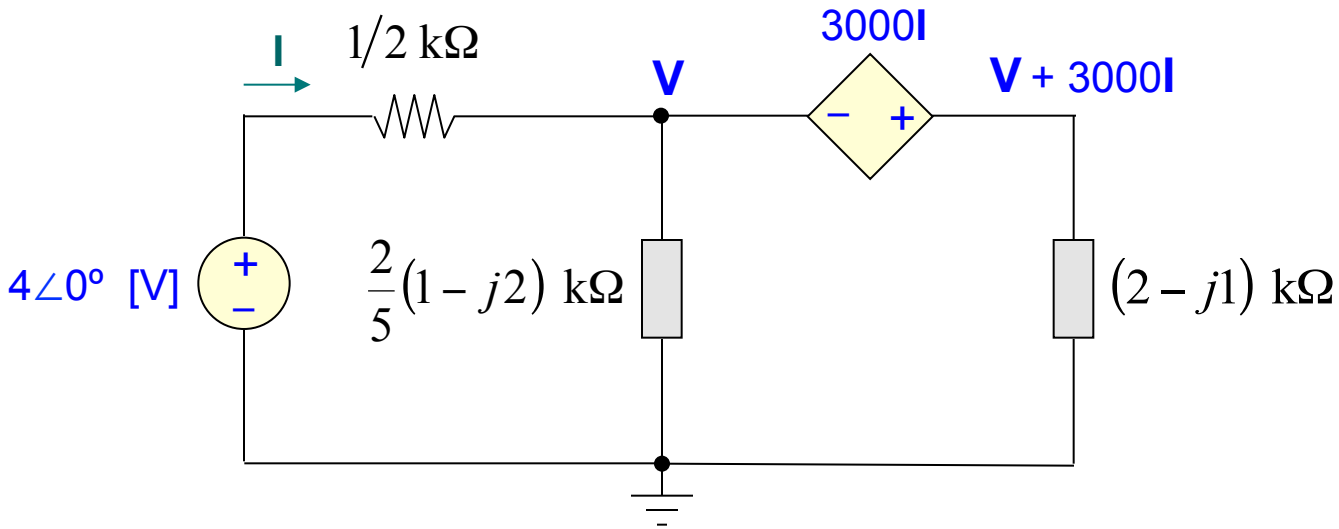
$$\mathbf{V}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2+j2 & 10 \\ -j & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j2 & -j \\ -j & 1-j \end{vmatrix}} = \frac{10-j20}{5} = 2+j4$$

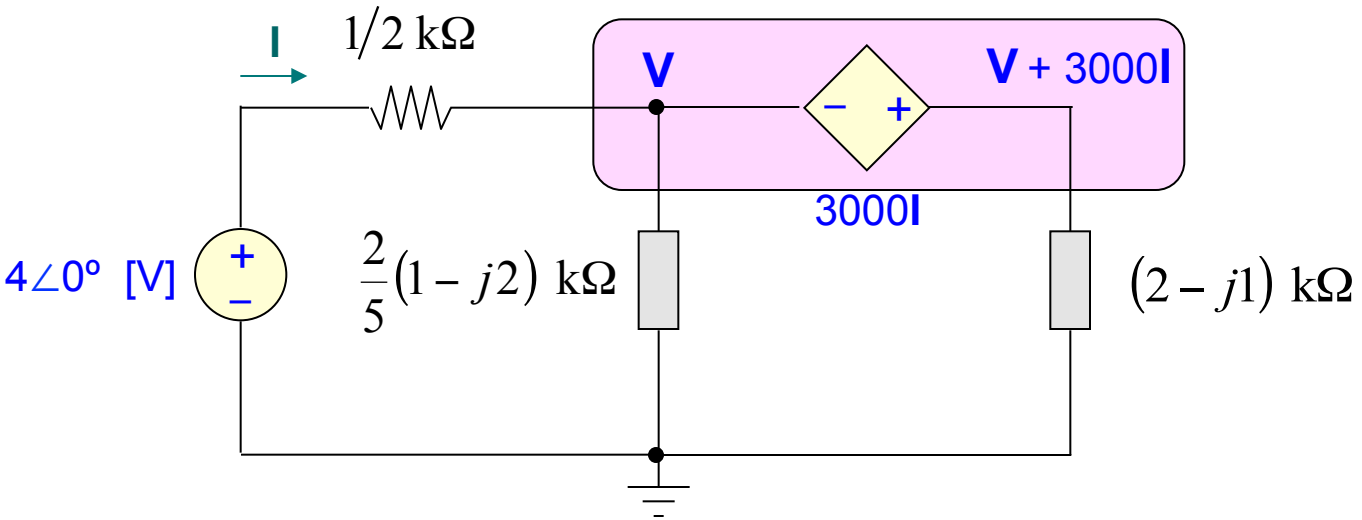
$$\mathbf{V}_1 = \sqrt{5}\angle -26{,}6^\circ \quad [\mathrm{V}] \longrightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{5}\cos\left(2t - 26{,}6^\circ\right) \quad [\mathrm{V}]}$$

$$\mathbf{V}_2 = 2\sqrt{5}\angle 63{,}4^\circ \quad [\mathrm{V}] \longrightarrow \boxed{v_2 = 2\sqrt{5}\cos\left(2t + 63{,}4^\circ\right) \quad [\mathrm{V}]}$$

Exemplo: Cálculo da resposta forçada *i*. Fonte dependente.







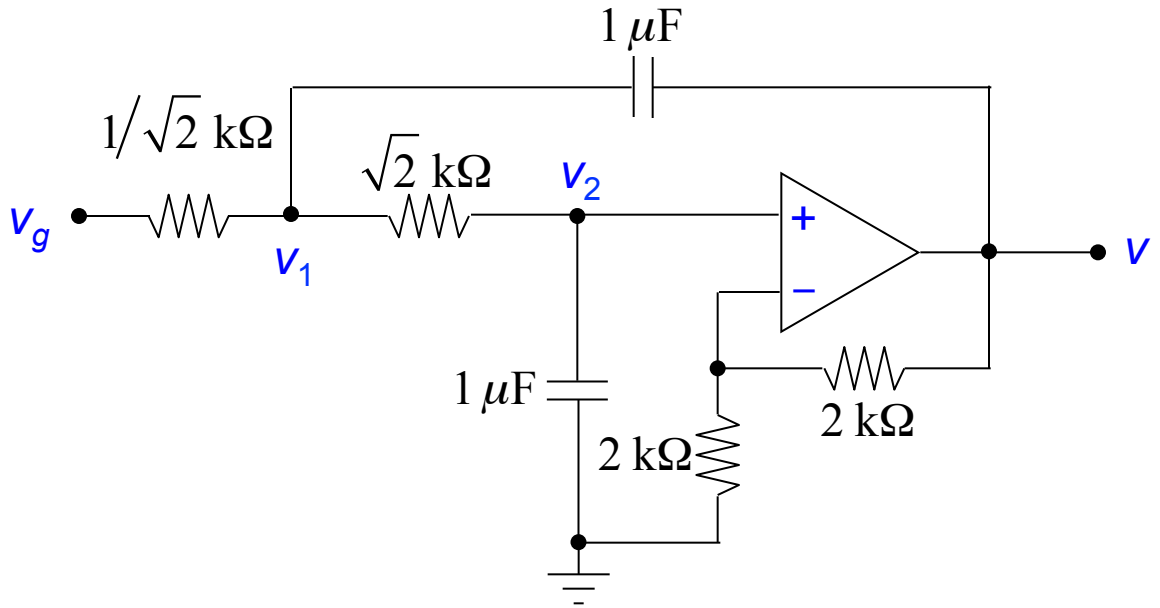
$$\frac{\mathbf{V}-4}{\frac{1}{2}\cdot 10^3}+\frac{\mathbf{V}}{\frac{2}{5}(1-j2)\cdot 10^3}+\frac{\mathbf{V}+3000\mathbf{I}}{(2-j1)\cdot 10^3}=0$$

Substituindo

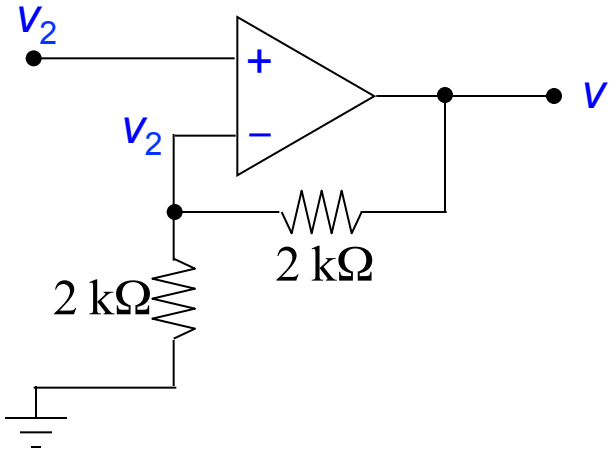
$$\mathbf{I}=\frac{4-\mathbf{V}}{\frac{1}{2}\cdot 10^3} \longrightarrow \mathbf{V}=4-\frac{1}{2}\cdot 10^3\mathbf{I}$$

$$\boxed{\mathbf{I}=24\cdot 10^{-3}\angle 53{,}1^\circ \quad [\mathrm{A}]} \longrightarrow \boxed{i=24\cos(5000t+53{,}1^\circ) \quad [\mathrm{mA}]}$$

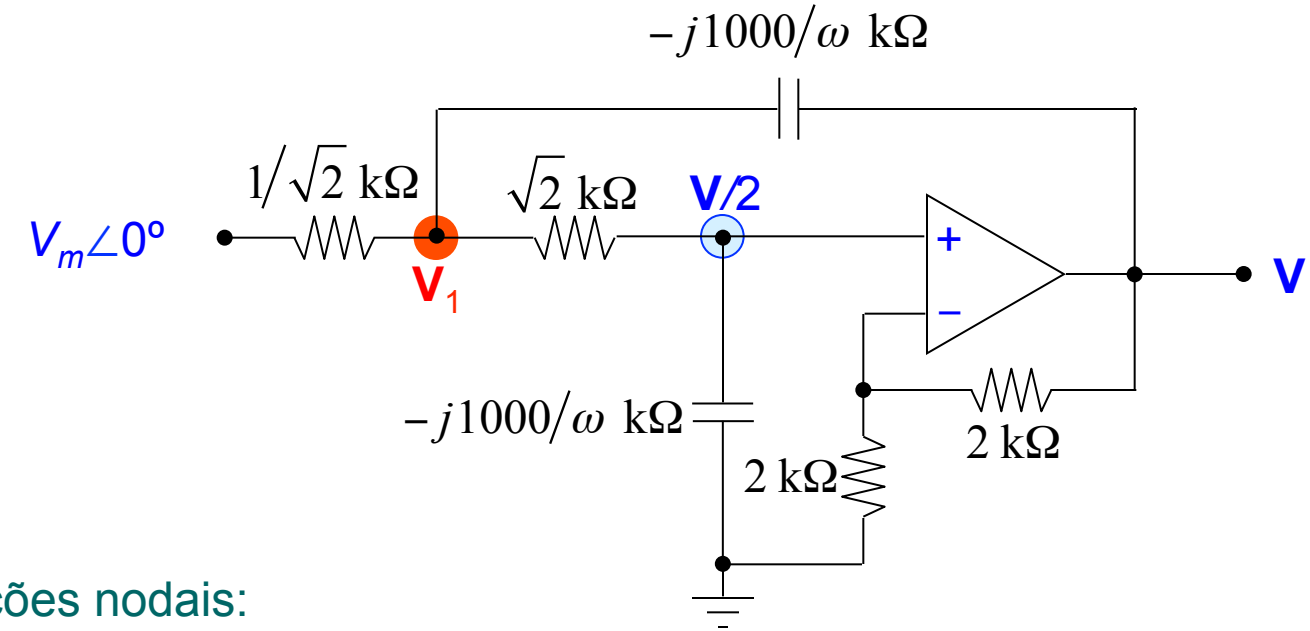
Exemplo: Cálculo da resposta forçada v para $v_g = V_m \cos(\omega t)$.



Fonte de tensão controlada a tensão:



$$v = \left(1 + \frac{2000}{2000}\right) v_2 = 2v_2 \longrightarrow \boxed{v_2 = \frac{v}{2}}$$



Equações nodais:

Nó $\mathbf{V}_1$:

$$\frac{\mathbf{V}_1 - V_m\angle 0°}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 10^3} + \frac{\mathbf{V}_1 - \frac{\mathbf{V}}{2}}{\sqrt{2}\cdot 10^3} + \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}}{-j\frac{10^6}{\omega}} = 0$$

Nó **V**/2:

$$\frac{\frac{\mathbf{V}}{2} - \mathbf{V}_1}{\sqrt{2}\cdot 10^3} + \frac{\frac{\mathbf{V}}{2}}{-j\frac{10^6}{\omega}} = 0 \longrightarrow \mathbf{V}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{-j2\cdot 10^3/\omega} + \frac{1}{2}\right)\mathbf{V}$$

Substituindo

$$\mathbf{V} = \frac{2V_m}{\left[1-\left(\frac{\omega^2}{10^6}\right)\right]+j\left(\frac{\sqrt{2}\omega}{10^3}\right)}$$

Forma polar:

$$\boxed{\mathbf{V} = \frac{2V_m\angle\theta}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{1000}\right)^4}}}$$

onde

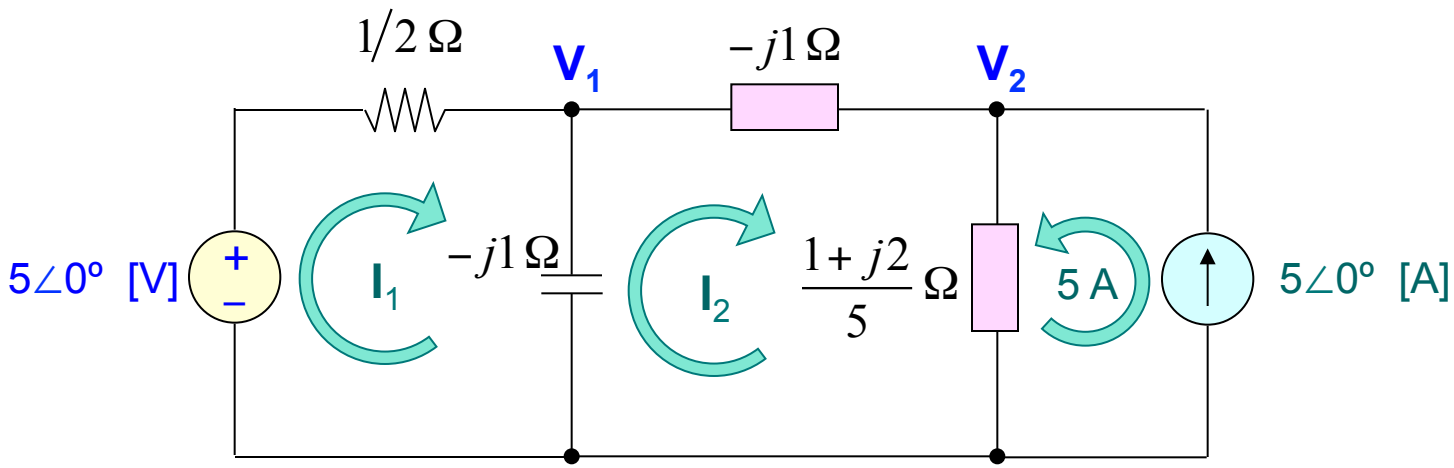
$$\boxed{\theta = -\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}\omega/1000}{1-\left(\omega/1000\right)^2}\right]}$$

Domínio do tempo:

$$\boxed{v = \frac{2V_m}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{1000}\right)^4}}\cos\left(\omega t+\theta\right)}$$

11.2 Análise de Malha

Exemplo: Análise de malha para um circuito em regime permanente c.a., cálculo de v_1.



$$\mathbf{V}_1 = 5 - \frac{\mathbf{I}_1}{2}$$

$$\frac{\mathbf{I}_1}{2} - j1\left(\mathbf{I}_1 - \mathbf{I}_2\right) = 5$$

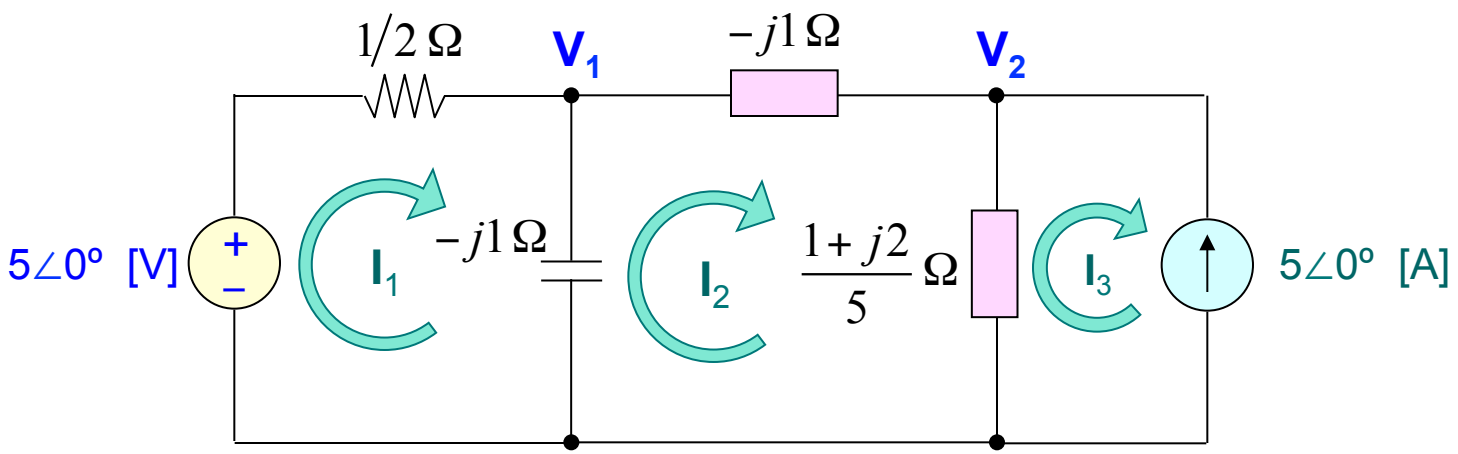
$$-j1\left(\mathbf{I}_2 - \mathbf{I}_1\right) - j1\mathbf{I}_2 + \left(\frac{1+j2}{5}\right)\left(\mathbf{I}_2 + 5\right) = 0$$

Resolvendo:

$$\boxed{\mathbf{I}_1 = 6 + j2 \quad [\mathrm{A}]} \qquad \boxed{\mathbf{V}_1 = 2 - j1 \quad [\mathrm{V}]}$$

Procedimento simplificado para escrever as equações de laço e de malha em circuitos fasoriais (semelhante aos resistivos):

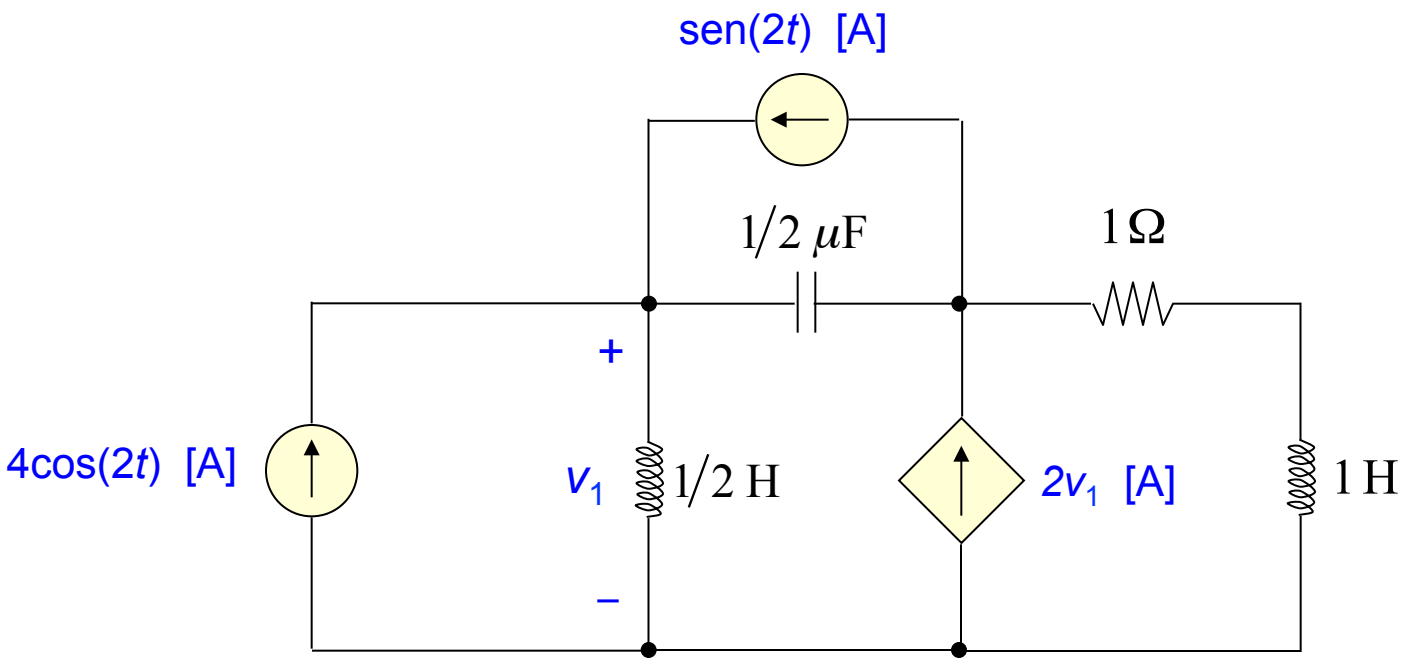
Definido $\mathbf{I}_3 = -5$ como a corrente da malha à direita no sentido horário, as equações de malhas podem ser escritas como:



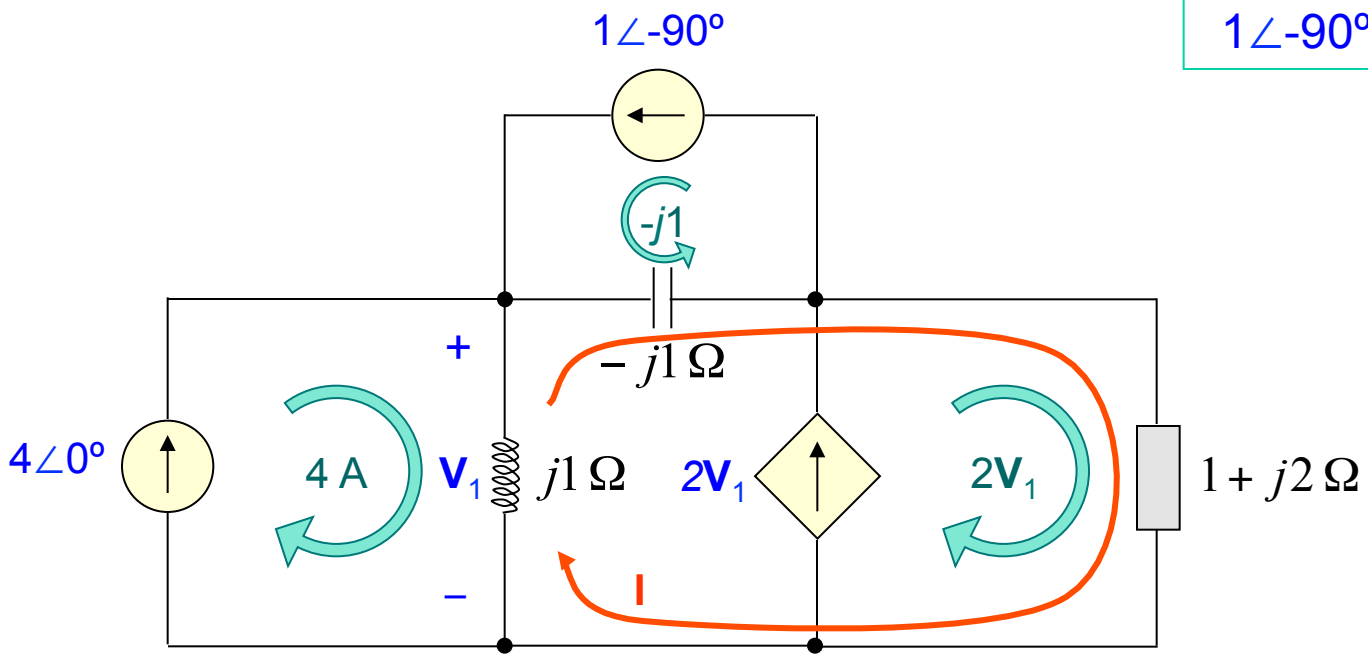
$$\left(\frac{1}{2} - j1\right)\mathbf{I}_1 - j1\left(-\mathbf{I}_2\right) = 5$$

$$-\left(-j1\right)\mathbf{I}_1 + \left(-j1 - j1 + \frac{1+j2}{5}\right)\mathbf{I}_2 - \left(\frac{1+j2}{5}\right)\mathbf{I}_3 = 0$$

Exemplo: Cálculo de v_1 em regime permanente.



$1\angle\text{-}90^{\circ} = -j1$



Aplicando Lei de Kirchhoff para tensões no laço **I**:

$$-\mathbf{V}_1 - j1(-j1+\mathbf{I}) + \left(1+2j\right)\left(\mathbf{I}+2\mathbf{V}_1\right) = 0$$

$$\mathbf{V}_1 = j1(4-\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbf{I} = -\frac{\mathbf{V}_1}{j1} + 4$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{-4+j3}{5} = 1\angle 143{,}1^{\circ}$$

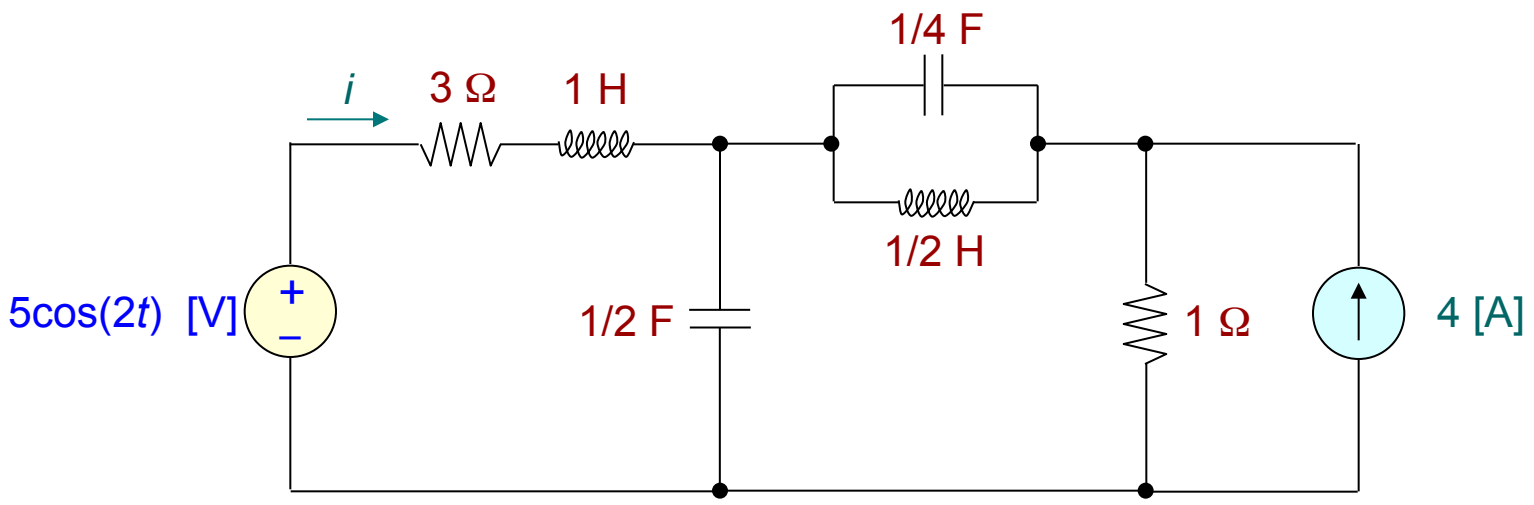
$$v_1 = \cos\left(2t + 143{,}1^{\circ}\right) \quad [\mathrm{V}]$$

11.3 Teoremas de Rede

Todos os teoremas de rede para circuitos resistivos são aplicáveis em circuitos fasoriais:

- Superposição,
- Teorema de Norton,
- Teorema de Thévenin,
- Princípio da Proporcionalidade.

Exemplo: Superposição, resposta forçada *i*.



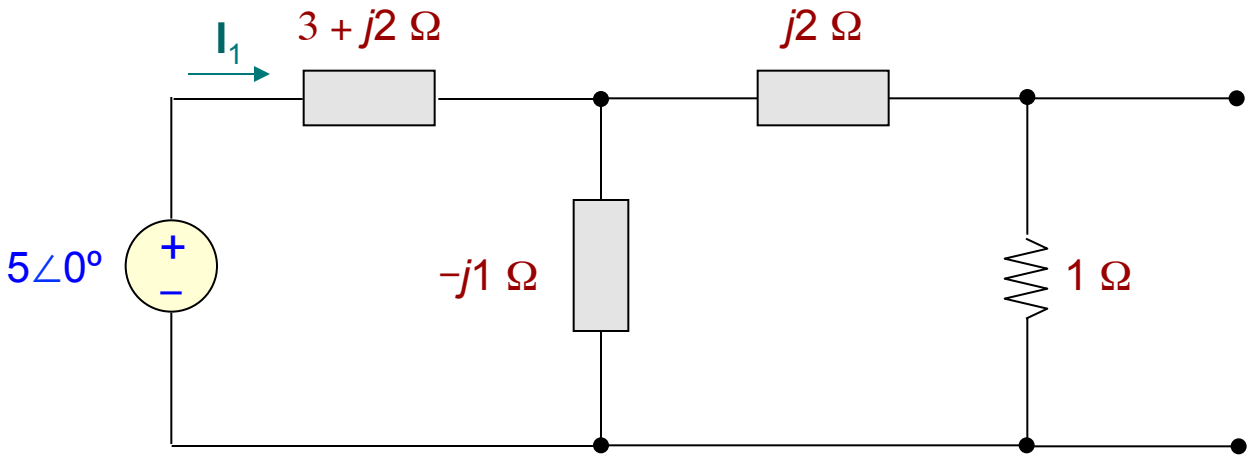
Fonte de tensão c.a. com ω = 2 rad/s e fonte de corrente c.c.

$$\boxed{i = i_1 + i_2}$$

i_1 = se deve à fonte de tensão.

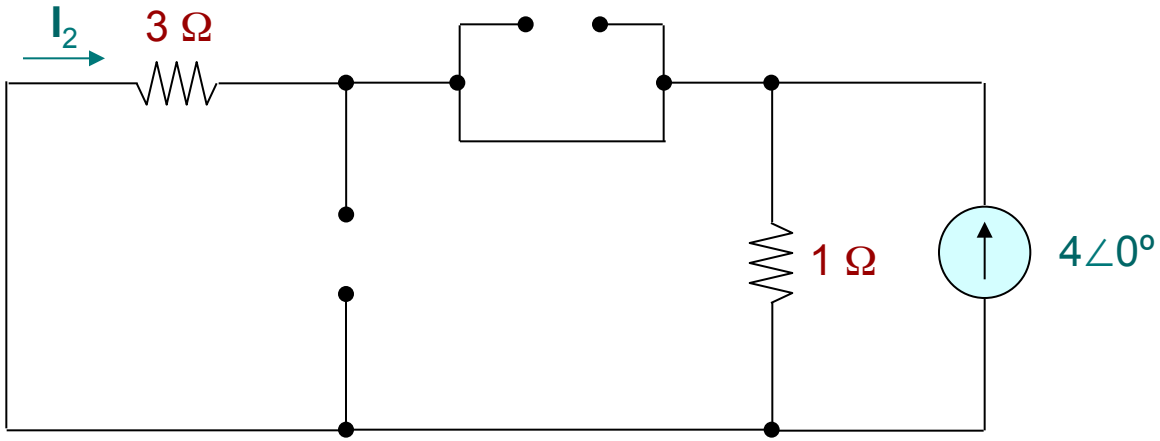
i_2 = se deve à fonte de corrente.

Corrente fasorial $\mathbf{I}_1$:



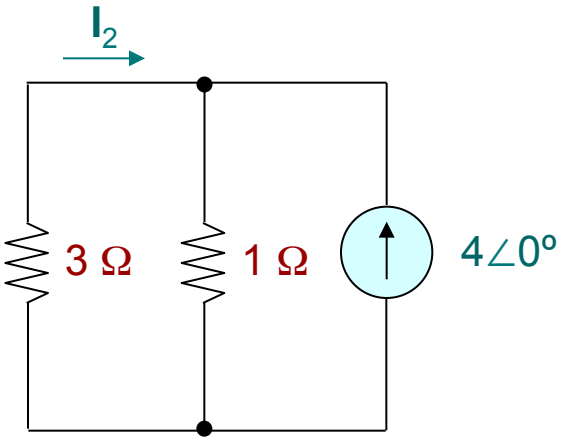
$$\mathbf{I}_1 = \frac{5\angle 0^\circ}{3 + j2 + \left[\dfrac{(1+j2)(-j1)}{1+j2-j1}\right]} = \sqrt{2}\angle -8{,}1^\circ \longrightarrow \boxed{i_1 = \sqrt{2}\cos(2t - 8{,}1^\circ) \quad [\mathrm{A}]}$$

Corrente fasorial $\mathbf{I}_2$:



Fonte de tensão morta e $\omega = 0$.

$$\mathbf{I}_g = 4\angle 0°$$



Por divisão de corrente:

$$\mathbf{I}_2 = -\left(\frac{1}{1+3}\right)4 = -1\angle 0° \longrightarrow \boxed{i_2 = -1 \quad [\mathrm{A}]}$$

Resposta forçada:

$$\boxed{i = i_1 + i_2 = \sqrt{2}\cos\left(2t - 8{,}1°\right) - 1 \quad [\mathrm{A}]}$$

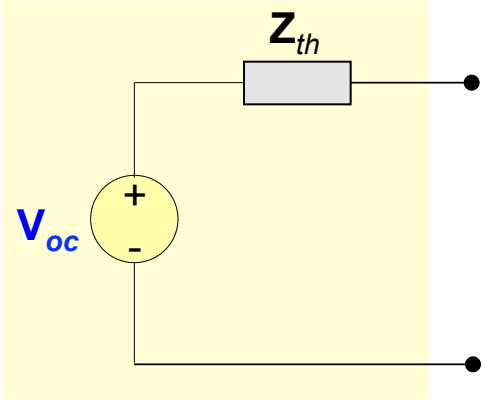
No caso dos teoremas de Thévenin e de Norton, o procedimento é semelhante ao adotado em circuitos resistivos, mudanças:

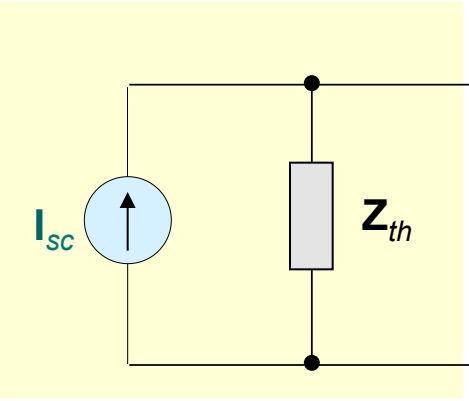
$V_{oc} \Leftrightarrow \mathbf{V}_{oc}$ (tensão fasorial de circuito aberto)

$I_{sc} \Leftrightarrow \mathbf{I}_{sc}$ (corrente fasorial de curto circuito)

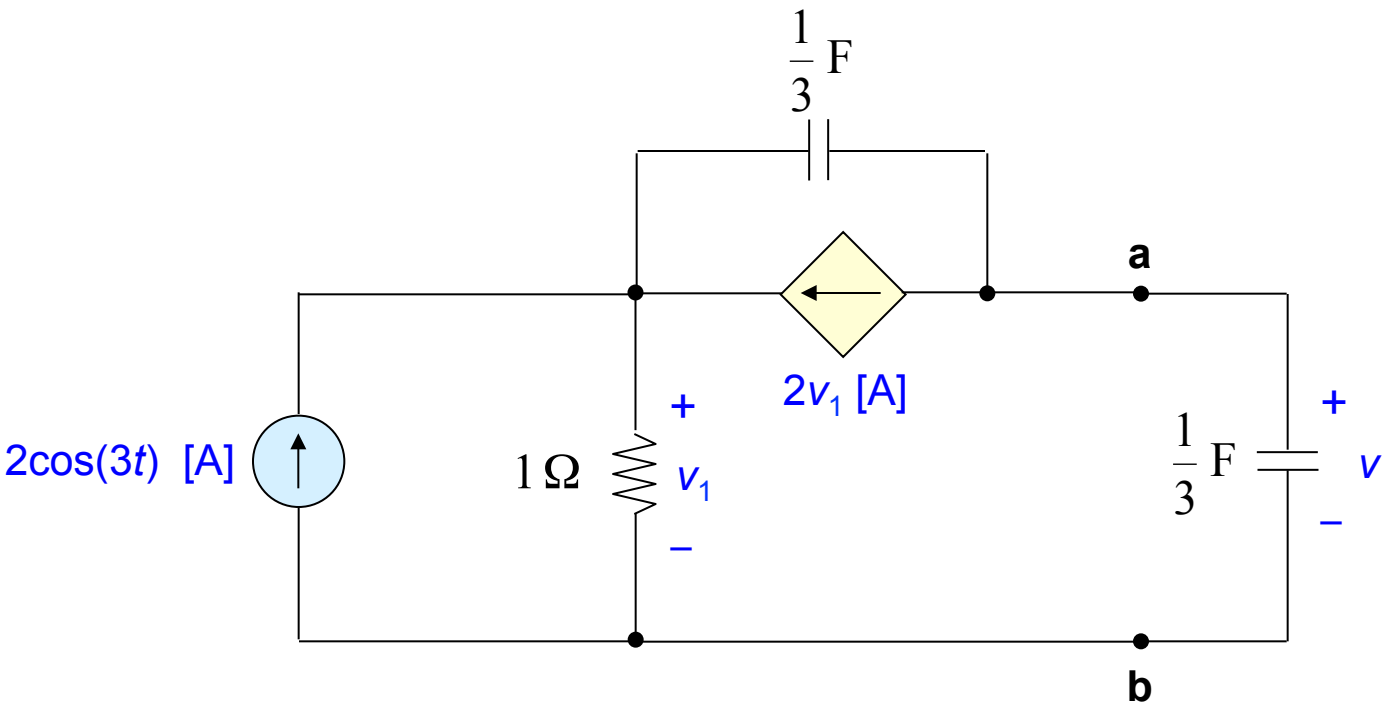
$R_{th} \Leftrightarrow \mathbf{Z}_{th}$ (impedância de Thévenin de circuito morto)

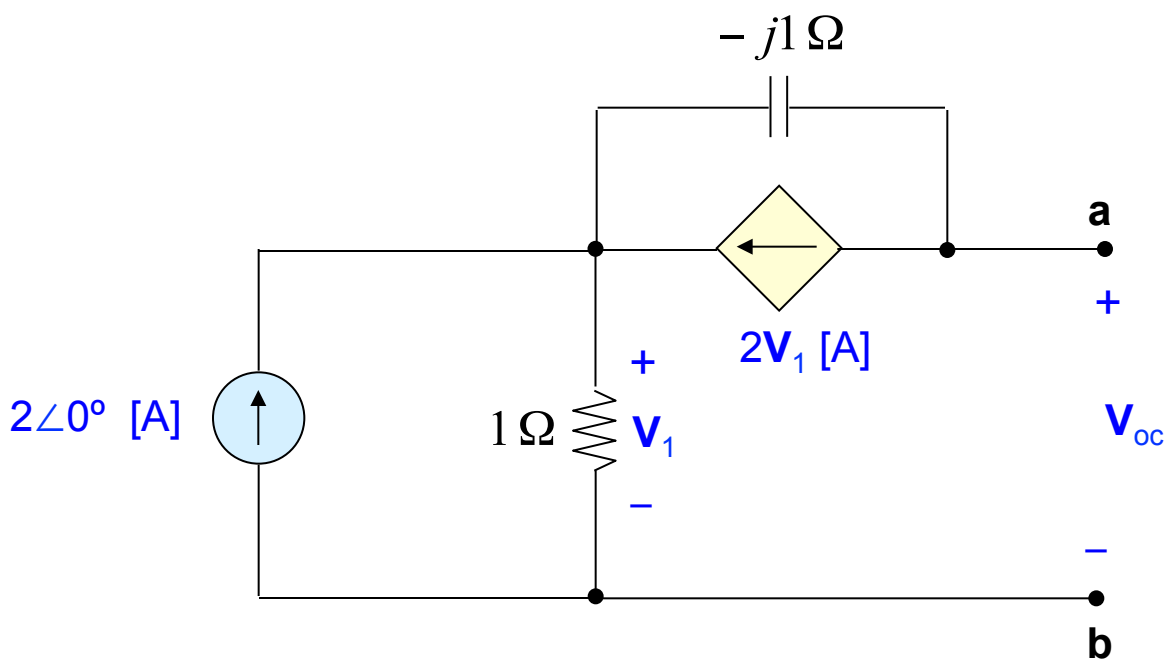
Deve haver uma única frequência (ω) presente, caso contrário devemos empregar superposição para dividir em problemas de frequências únicas, onde para cada circuito temos um equivalente de Thévenin ou Norton,





Exemplo: Teorema de Thévenin. Cálculo da resposta forçada *v*.



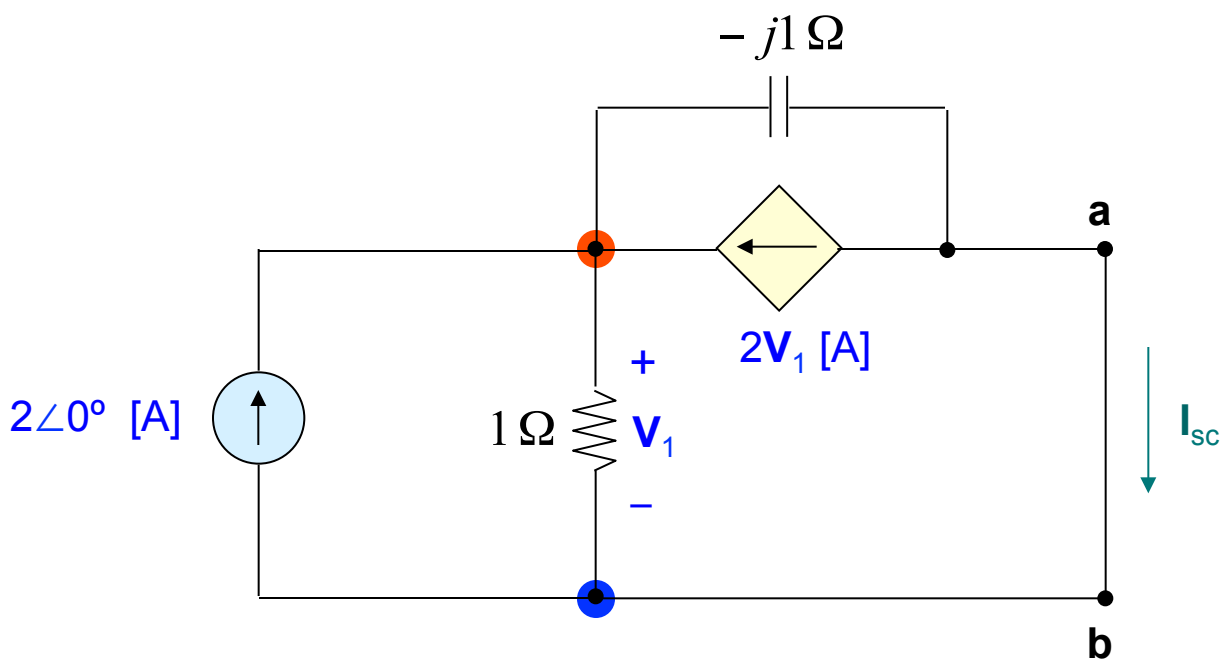


$$\mathbf{Z}_{th} = \frac{\mathbf{V}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}}$$

$$\mathbf{V}_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

Lei de Kirchhoff de tensões:

$$\boxed{\mathbf{V}_{oc} = \mathbf{V}_1 - (-j1)2\mathbf{V}_1 = 2(1 + j2) = 2 + j4}$$

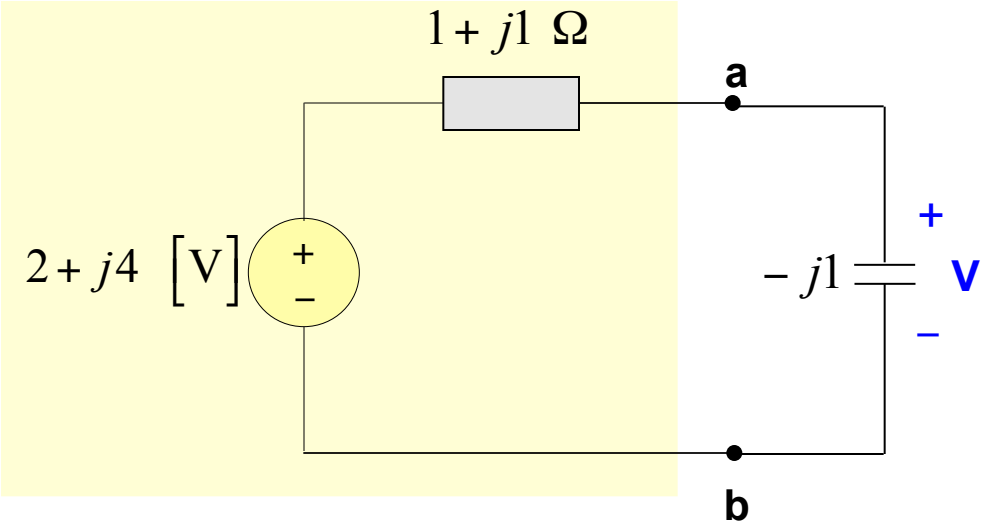


Equações nodais:

- $$\frac{\mathbf{V}_1}{1} + \frac{\mathbf{V}_1}{-j1} - 2\mathbf{V}_1 = 2 \longrightarrow \mathbf{V}_1 = -1 - j1$$
- $$\mathbf{I}_{sc} = -\frac{\mathbf{V}_1}{1} + 2 \longrightarrow \boxed{\mathbf{I}_{sc} = 3 + j1}$$

$$\boxed{\mathbf{Z}_{th} = \frac{\mathbf{V}_{oc}}{\mathbf{I}_{sc}} = \frac{2 + j4}{3 + j1} = 1 + j1 \quad [\Omega]}$$

Circuito equivalente de Thévenin:



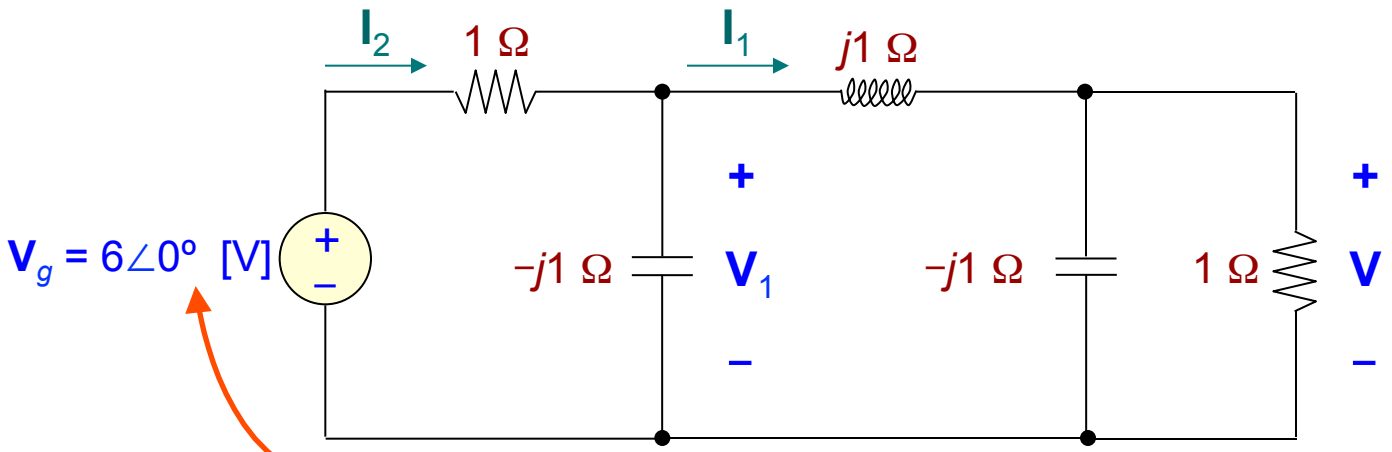
Divisão de tensão:

$$\mathbf{V} = \left[\frac{-j1}{(1+j1)+(-j1)}\right](2+j4) = 4 - j2 = 2\sqrt{5}\angle -26{,}6^\circ \quad [\mathrm{V}]$$

Domínio do tempo:

$$\boxed{v = 2\sqrt{5}\cos(3t - 26{,}6^\circ) \quad [\mathrm{V}]}$$

Exemplo: Cálculo da resposta forçada **V** em regime permanente (Proporção).



Supor **V** = 1 V.

$$\mathbf{I}_1 = \frac{\mathbf{V}}{1} + \frac{\mathbf{V}}{-j1} = 1 + j1$$

$$\mathbf{V}_1 = j1\mathbf{I}_1 + \mathbf{V} = j1\left(1 + j1\right) + 1 = j1$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_1}{-j1} + \mathbf{I}_1 = -1 + \left(1 + j1\right) = j1$$

$$\mathbf{V}_g = 1 \cdot \mathbf{I}_2 + \mathbf{V}_1 = j1 + j1 = \boxed{j2 \ \ [\mathrm{V}]}$$

Mas $\mathbf{V}_g$ é igual a:

$$\boxed{\mathbf{V}_g = \frac{6}{j2} \cdot j2 \ \ [\mathrm{V}]}$$

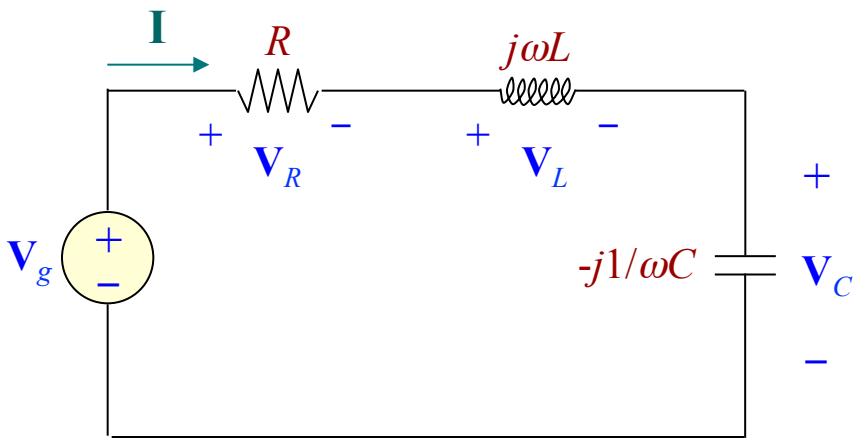
Então,

$$\boxed{\mathbf{V} = 1 \cdot \frac{6}{j2} = -j3 \ \ [\mathrm{V}]}$$

11.4 Diagramas Fasoriais

Fasores = números complexos ⇒ representação: vetores em um plano.

Exemplo: Circuito fasorial



Referência: corrente **I** comum a todos os elementos: $\mathbf{I} = |\mathbf{I}|\angle 0°$

Tensões fasoriais:

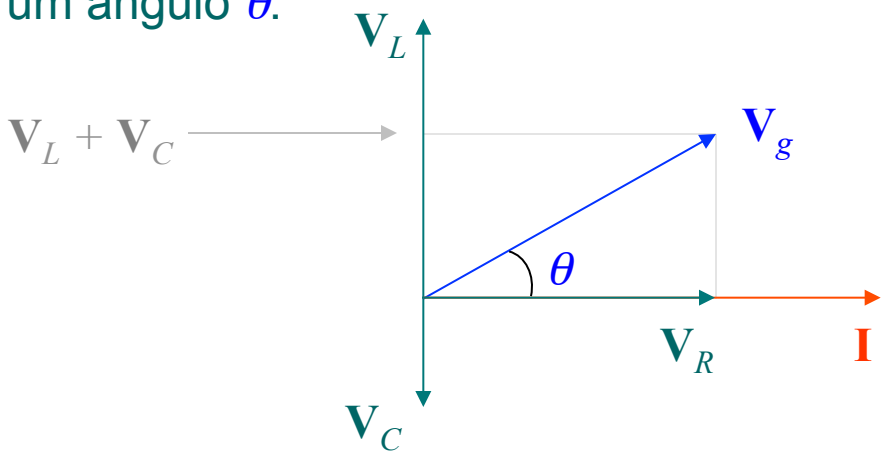
$$\mathbf{V}_R = R\mathbf{I} = R|\mathbf{I}|$$

$$\mathbf{V}_L = j\omega L\mathbf{I} = \omega L|\mathbf{I}|\angle 90°$$

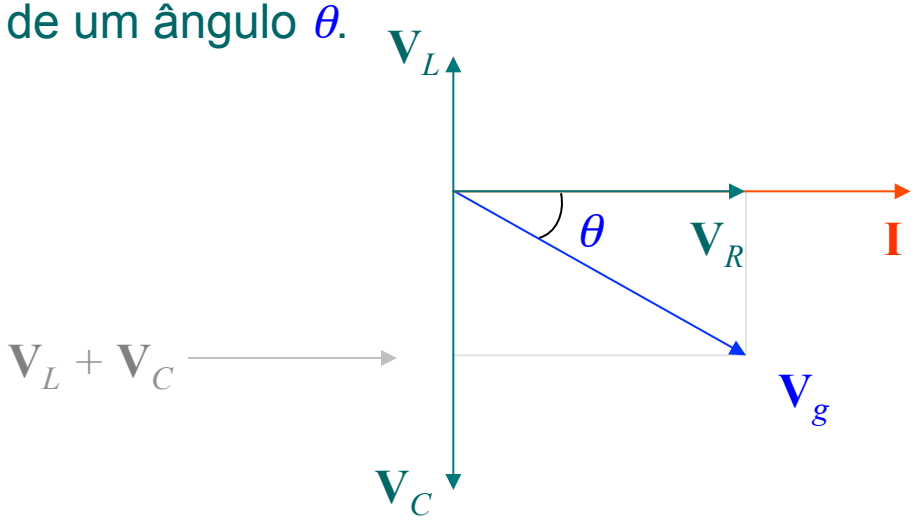
$$\mathbf{V}_C = -j\frac{1}{\omega C}\mathbf{I} = \frac{1}{\omega C}|\mathbf{I}|\angle -90°$$

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C$$

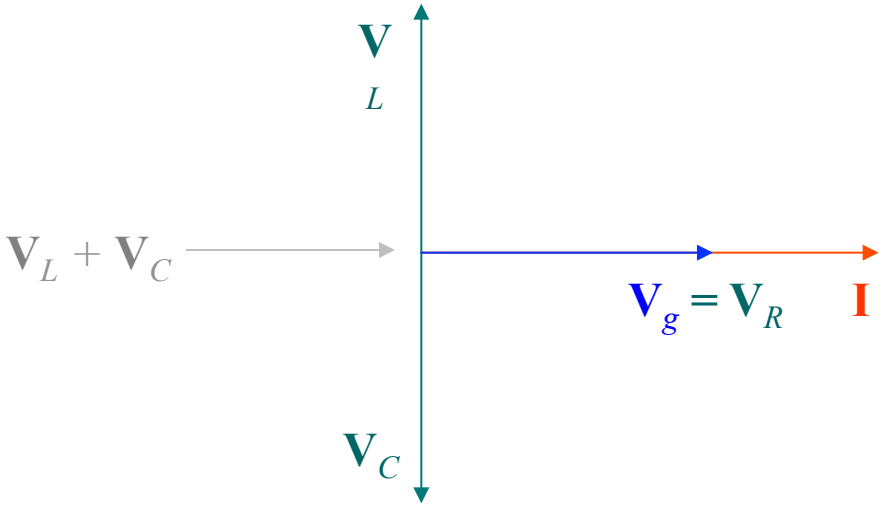
Caso a: $|\mathbf{V}_L| > |\mathbf{V}_C| \Rightarrow$ reatância total é indutiva, a corrente atrasa a tensão da fonte de um ângulo θ.



Caso b: $|\mathbf{V}_L| < |\mathbf{V}_C| \Rightarrow$ reatância total é capacitiva, a corrente adianta a tensão da fonte de um ângulo θ.



Caso c: $|\mathbf{V}_L| = |\mathbf{V}_C| \Rightarrow$ reatância total é nula, a corrente e a tensão da fonte estão em fase.



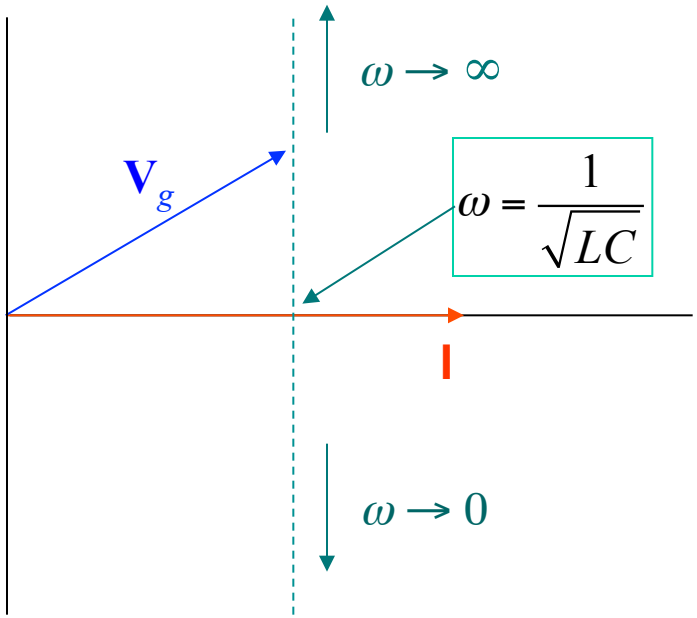
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_g}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{V}_g}{R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)}$$

Assim,

$$\boxed{\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0} \longrightarrow \boxed{\omega L = \frac{1}{\omega C}} \longrightarrow \boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

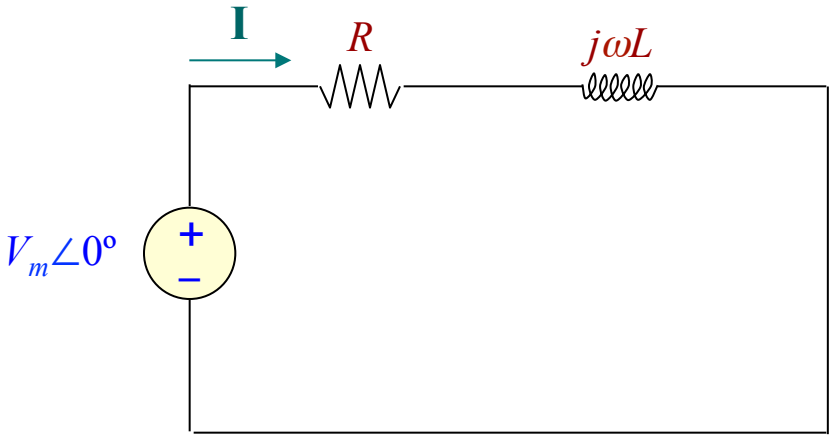
Se a corrente $\mathbf{I}$ é fixa, então a componente real da tensão $\mathbf{V}_g$ ($\mathbf{V}_R = R\,|\,\mathbf{I}\,|$) também é fixa.

Lugar geométrico o fasor $\mathbf{V}_g$ para $\mathbf{I}$ fixa:



A amplitude mínima da tensão ocorre quando $\omega = 1/\sqrt{LC}$. Para qualquer outra frequência, uma amplitude maior de tensão é necessária para a mesma corrente.

Exemplo: Diagramas fasoriais. Lugar geométrico de $\mathbf{I}$ com a variação de R.



$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{R + j\omega L} = \frac{V_m\left(R - j\omega L\right)}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{V_m R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{V_m \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\mathbf{I} = x + jy$$

$$\boxed{x = \mathrm{Re}\left\{\mathbf{I}\right\} = \frac{V_m R}{R^2 + \omega^2 L^2}} \qquad \boxed{y = \mathrm{Im}\left\{\mathbf{I}\right\} = -\frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Para obter o lugar geométrico de $\mathbf{I}$ temos que eliminar R nas equações acima.

$$\frac{x}{y} = -\frac{R}{\omega L} \longrightarrow R = -\frac{\omega L x}{y}$$

Substituindo na expressão $y = -\dfrac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$, obtemos

$$x^2 + y^2 = -\frac{V_m y}{\omega L}$$

que pode ser reescrita como:

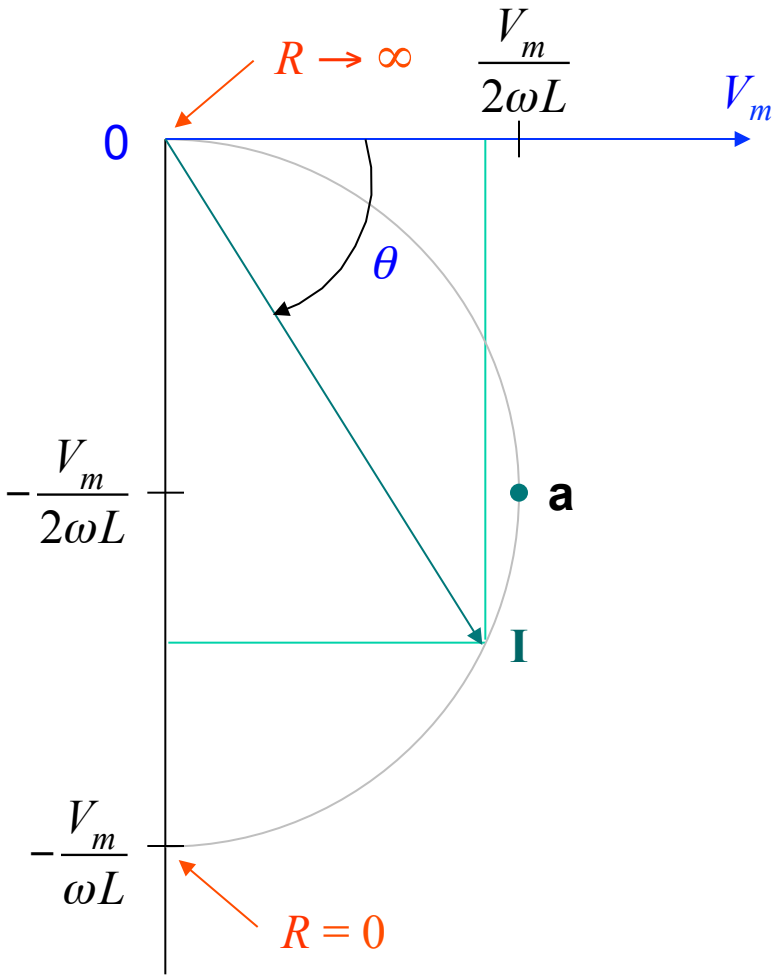
$$\boxed{x^2 + \left(y + \frac{V_m}{2\omega L}\right)^2 = \left(\frac{V_m}{2\omega L}\right)^2}$$

que é a equação de uma circunferência de raio $V_m/2\omega L$ e centro em $[0, -V_m/2\omega L]$.

A semicircunferência para $x > 0$ é o lugar geométrico do fasor $\mathbf{I} = x + jy$, com R variando.

A tensão $V_m\angle 0^o$ é tomada como referência.

Lugar geométrico de **I**.



raio: $V_m/2\omega L$

centro: $[0, -V_m/2\omega L]$

$$x = \frac{V_m R}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$y = -\frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$x = \frac{V_m R}{R^2 + \omega^2 L^2} \qquad y = -\frac{\omega L V_m}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

Se R = 0, então:

$$\boxed{x = 0} \qquad \boxed{y = -\frac{V_m}{\omega L}}$$

Se $R \to \infty$, então:

$$\boxed{x = 0} \qquad \boxed{y = 0}$$

A corrente fasorial move-se ao redor do círculo no sentido anti-horário.

Corrente fasorial possui duas componentes: $I_m \cos\theta$ em fase com a tensão e $I_m \operatorname{sen}\theta$ que está 90º fora de fase com a tensão.

O diagrama fasorial permite visualizar a componente da corrente de fase máxima, que ocorre no ponto **a**, ou seja, com $\theta = 45^\circ$ ($x = -y$ ou $R = \omega L$).