Capítulo 4

Métodos de Análise

4.1 Análise Nodal

Análise de circuitos mais gerais acarreta na solução de um conjunto de equações.

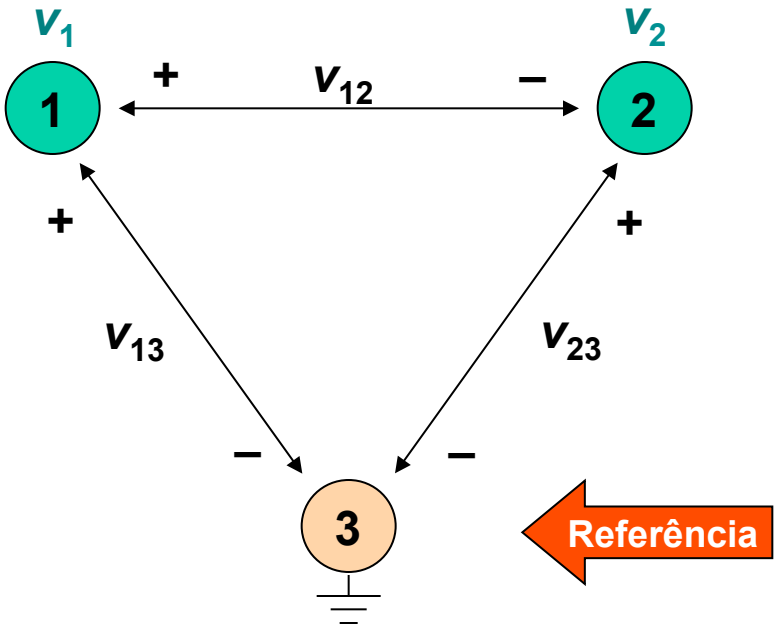
Análise nodal:

- Tensões são as incógnitas a serem determinadas.
- Deve-se escolher um nó do circuito como referência.
- Associar aos outros nós uma tensão em relação ao nó de referência (tensão de nó).
- Polaridade de um nó é escolhida de tal forma que as tensões dos nós sejam positivas em relação ao nó de referência.
- Nó de referência é geralmente escolhido como o que possui o maior número de ramos conectados.

Análise nodal (continuação):

- Nó de referência possui potencial zero (terra).
- Aplica-se então a lei de Kirchhoff para corrente nos nós.
- As correntes nos elementos são proporcionais às tensões sobre os mesmos.

Exemplo:



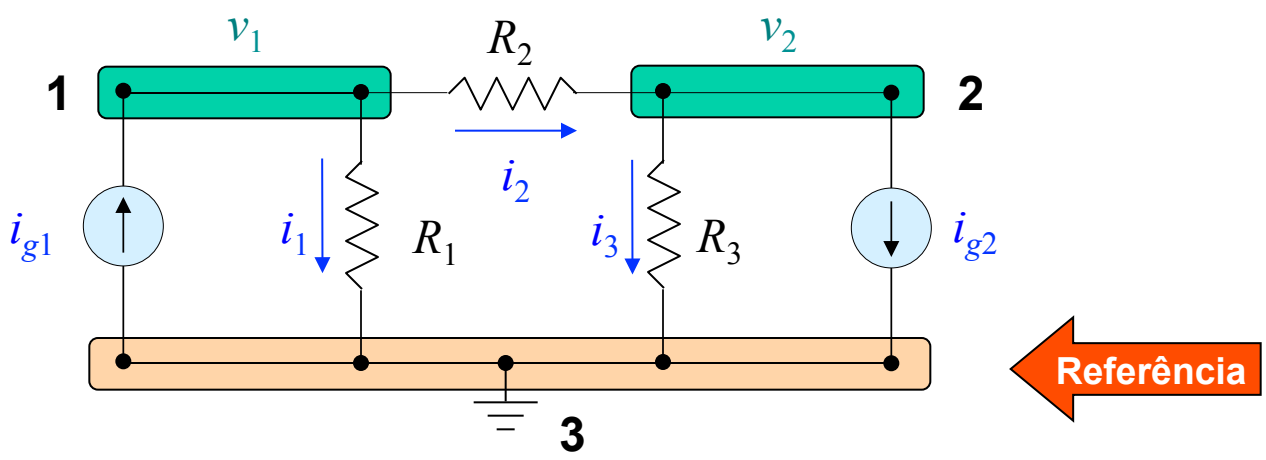
Tensões de nó: v_1 e v_2

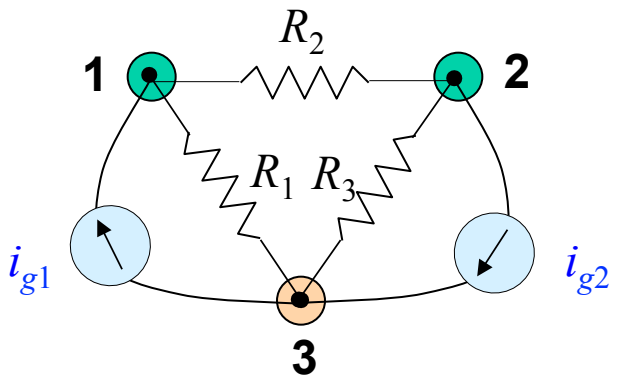
$$v_{12} = v_1 - v_2$$

$$v_{13} = v_1 - 0 = v_1$$

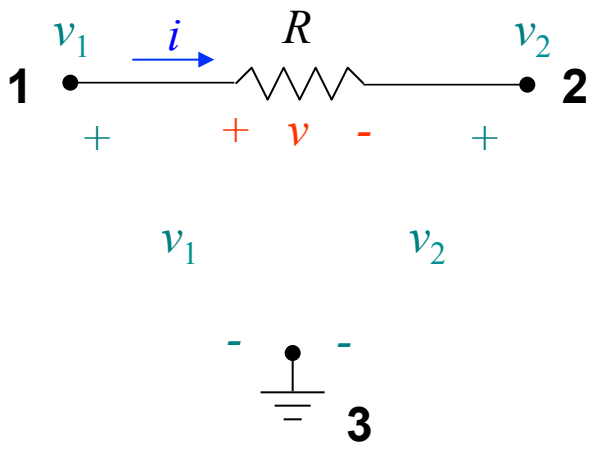
$$v_{23} = v_2 - 0 = v_2$$

Exemplo:


v_1
R_2
v_2
1
2
i_2
i_{g1}
i_1
R_1
i_3
R_3
i_{g2}
Referência
3


R_2
1
2
R_1 R_3
i_{g1}
i_{g2}
3

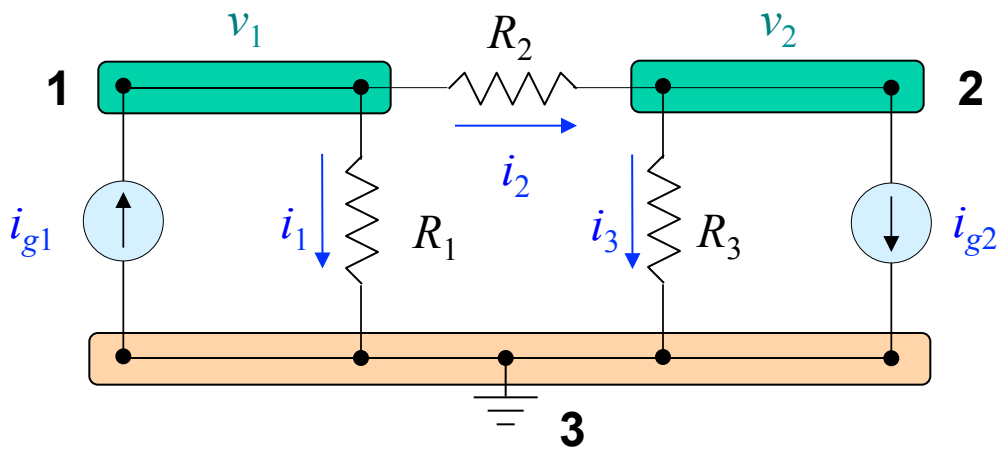
Parênteses:



$$v = v_1 - v_2$$

$$i = \frac{v}{R} = \frac{v_1 - v_2}{R} \qquad i = \frac{v}{R} = G(v_1 - v_2)$$

Permitem escrever as equações de nós por inspeção direta em função das tensões dos nós.



Lei de Kirchhoff de correntes:

Nó 1: $i_1 + i_2 - i_{g1} = 0$ ou em termos de tensões: $G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2) - i_{g1} = 0$

Nó 2: $-i_2 + i_3 + i_{g2} = 0$ ou em termos de tensões: $G_2(v_2 - v_1) + G_3 v_2 + i_{g2} = 0$

Rearranjando as equações segundo as correntes que saem e as correntes que entram nos nós:

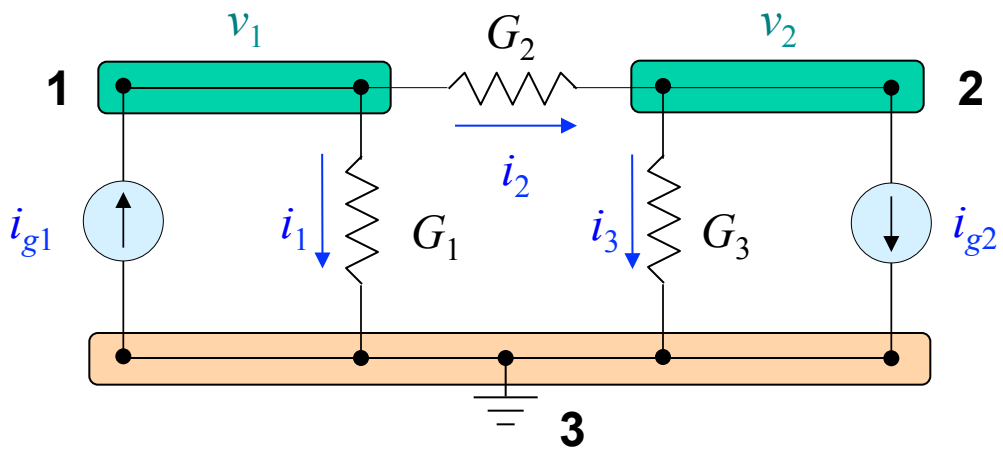
$$G_1 v_1 + G_2(v_1 - v_2) = i_{g1}$$

$$G_2(v_2 - v_1) + G_3 v_2 = -i_{g2}$$

$$(G_1 + G_2)v_1 - G_2 v_2 = i_{g1}$$

$$-G_2 v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = -i_{g2}$$

Exibem uma simetria $\Rightarrow$ equações por inspeção



Corrente que entra no nó 1.

$$(G_1 + G_2)v_1 - G_2 v_2 = i_{g1}$$

Valor negativo da condutância conectada ao nó 2.

Soma das condutâncias conectadas ao nó 1

Corrente que entra no nó 2.

$$-G_2 v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = -i_{g2}$$

Soma das condutâncias conectadas ao nó 2

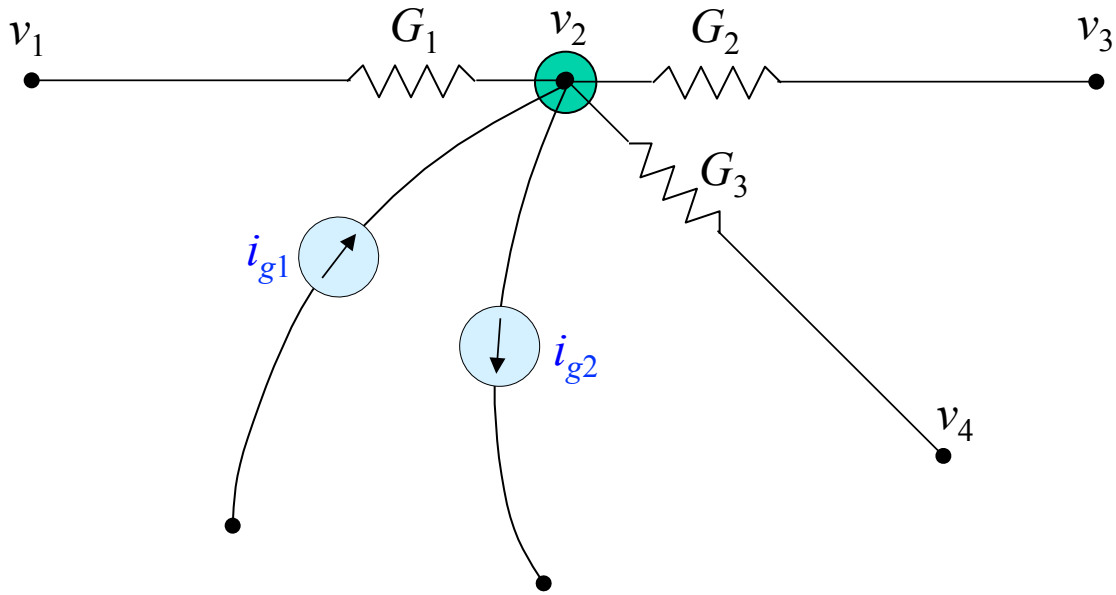
Valor negativo da condutância conectada ao nó 1.

Generalizando:

Em circuitos contendo somente condutâncias e fontes de correntes, a lei de Kirchhoff de correntes pode ser aplicada ao *k*-ésimo nó, com a tensão de nó v_k, como se segue:

- no lado esquerdo das equações, o coeficiente das outras tensões de nó são os valores das condutâncias existentes entre estes nós e o nó *k*, com o valor negativo.
- No lado direito das equações, ficam as correntes que fluem para o nó *k*, devido às fontes.

Exemplo:

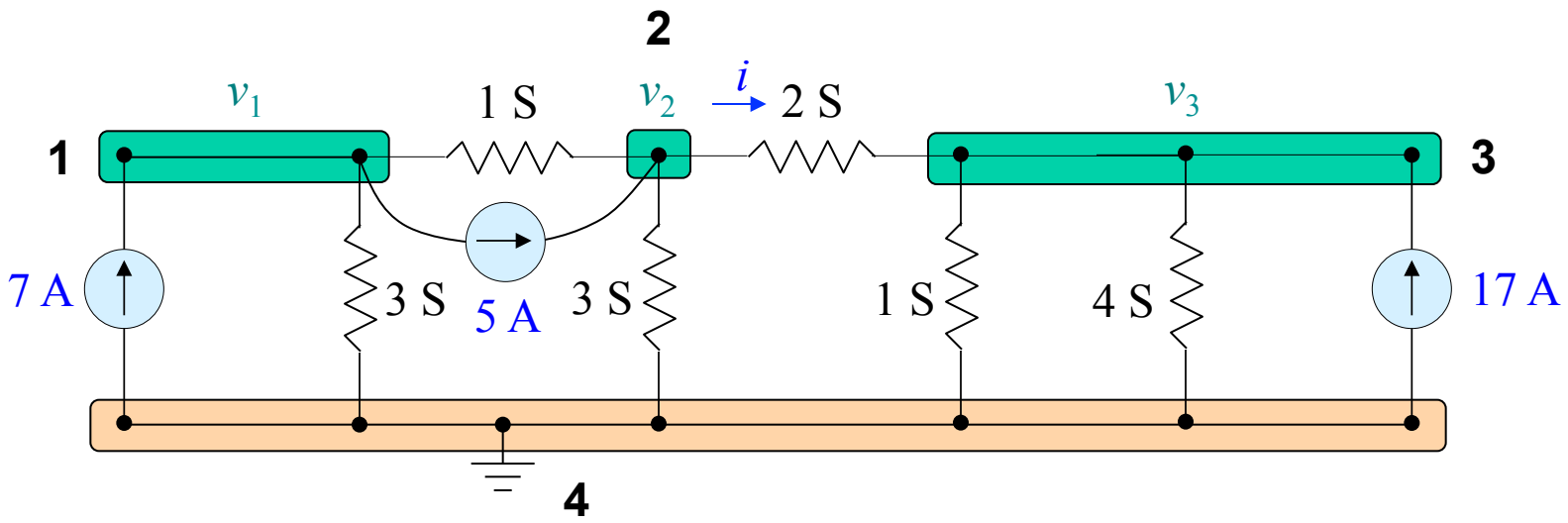


Por inspeção: $$-G_1v_1 + (G_1 + G_2 + G_3)v_2 - G_2v_3 - G_3v_4 = i_{g1} - i_{g2}$$

Pela lei de Kirchhoff de correntes:

$$G_1(v_2 - v_1) + G_2(v_2 - v_3) + G_3(v_2 - v_4) + i_{g2} = i_{g1}$$

4.2 Um Exemplo



Nó 1 (por inspeção): $(3+1)\cdot v_1 - 1\cdot v_2 = 7-5 \;\Rightarrow\; 4v_1 - v_2 = 2$

Nó 1 (por Kirchhoff): $1\cdot(v_1 - v_2) + 3\cdot v_1 + 5 = 7 \;\Rightarrow\; 4v_1 - v_2 = 2$

Nó 2 (por inspeção): $-1v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 5$

Nó 3 (por inspeção): $-2v_2 + 7v_3 = 17$

Resolução simultânea das 3 equações:

- Regra de Cramer (determinantes).
- Regra de eliminação de Gauss.

Solução usando Regra de Cramer:

$$\begin{cases} 4v_1 - v_2 = 2 \\ -v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 5 \\ -2v_2 + 7v_3 = 17 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 145$$

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \\ 17 & -2 & 7 \end{vmatrix}}{145} = \frac{145}{145} = 1 \ [\mathrm{V}]$$

$$v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix}}{145} = \frac{290}{145} = 2 \ [\mathrm{V}]$$

$$v_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & -2 & 17 \end{vmatrix}}{145} = \frac{435}{145} = 3 \ [\mathrm{V}]$$

Valor da corrente *i*:

$$i = 2 \cdot \left(v_2 - v_3\right) = 2\left(2 - 3\right) = -2 \quad \left[\mathrm{A}\right]$$

Observação: As equações dos nós são simétricas.

$$4v_1 - 1v_2 + 0v_3 = 2$$

$$-1v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 5$$

$$0v_1 - 2v_2 + 7v_3 = 17$$

Coeficiente de v_2 na primeira equação é igual ao de v_1 na segunda.

Coeficiente de v_3 na primeira equação é igual ao de v_1 na terceira.

Coeficiente de v_3 na segunda equação é igual ao de v_2 na terceira.

Explicação: condutância entre os nós 1 e 2 = condutância entre os nós 2 e 1,
condutância entre os nós 1 e 3 = condutância entre os nós 3 e 1, etc.

Resolução pela regra de eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 4v_1 - v_2 = 2 \\ -v_1 + 6v_2 - 2v_3 = 5 \\ -2v_2 + 7v_3 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 6 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

a) 1ª linha + 2ª linha × 4:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 23 & -8 & 22 \\ 0 & -2 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

b) 2ª linha + 3ª linha × 23/2:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 23 & -8 & 22 \\ 0 & 0 & 145/2 & 435/2 \end{bmatrix}$$

c) 3ª linha ÷ 145/2:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 23 & -8 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

d) 2ª linha + 3ª linha × 8:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 23 & 0 & 46 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e) 2ª linha ÷ 23:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

f) 1ª linha + 2ª linha:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

g) 1ª linha ÷ 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$v_1 = 1$ [V]

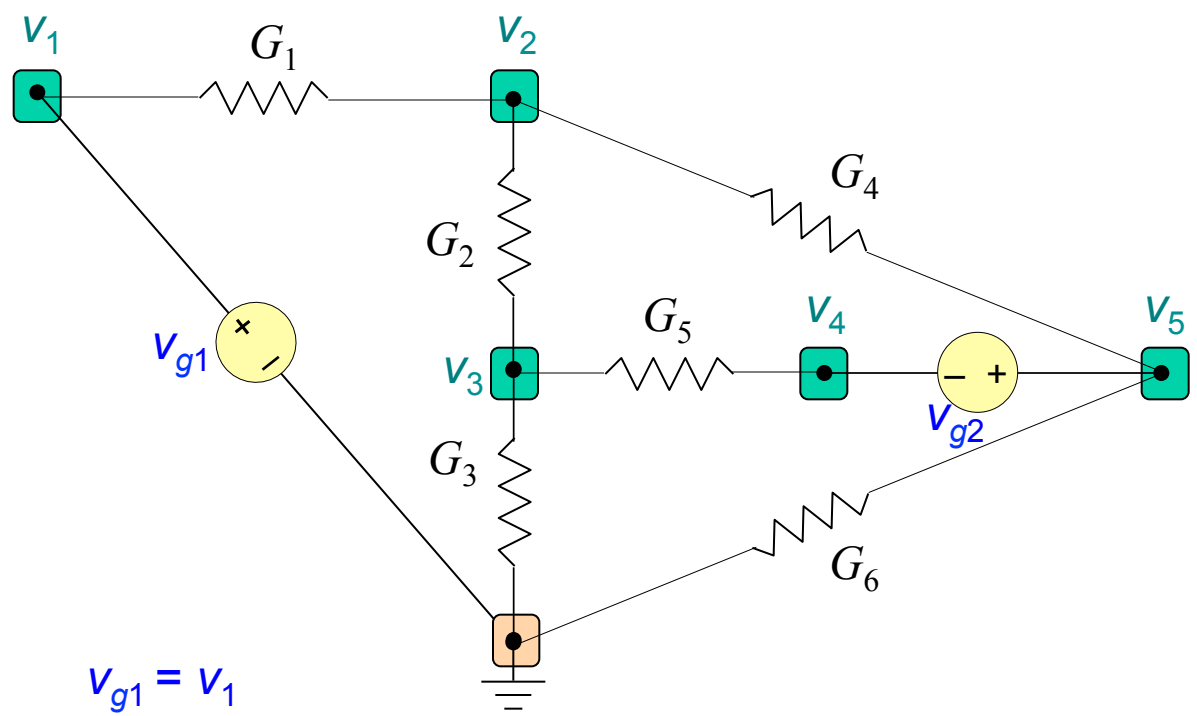
$v_2 = 2$ [V]

$v_3 = 3$ [V]

4.3 Circuitos Contendo Fontes de Tensão

Não se pode escrever as equações utilizando o processo simplificado pois as correntes que fluem pelas fontes de tensão não são conhecidas.

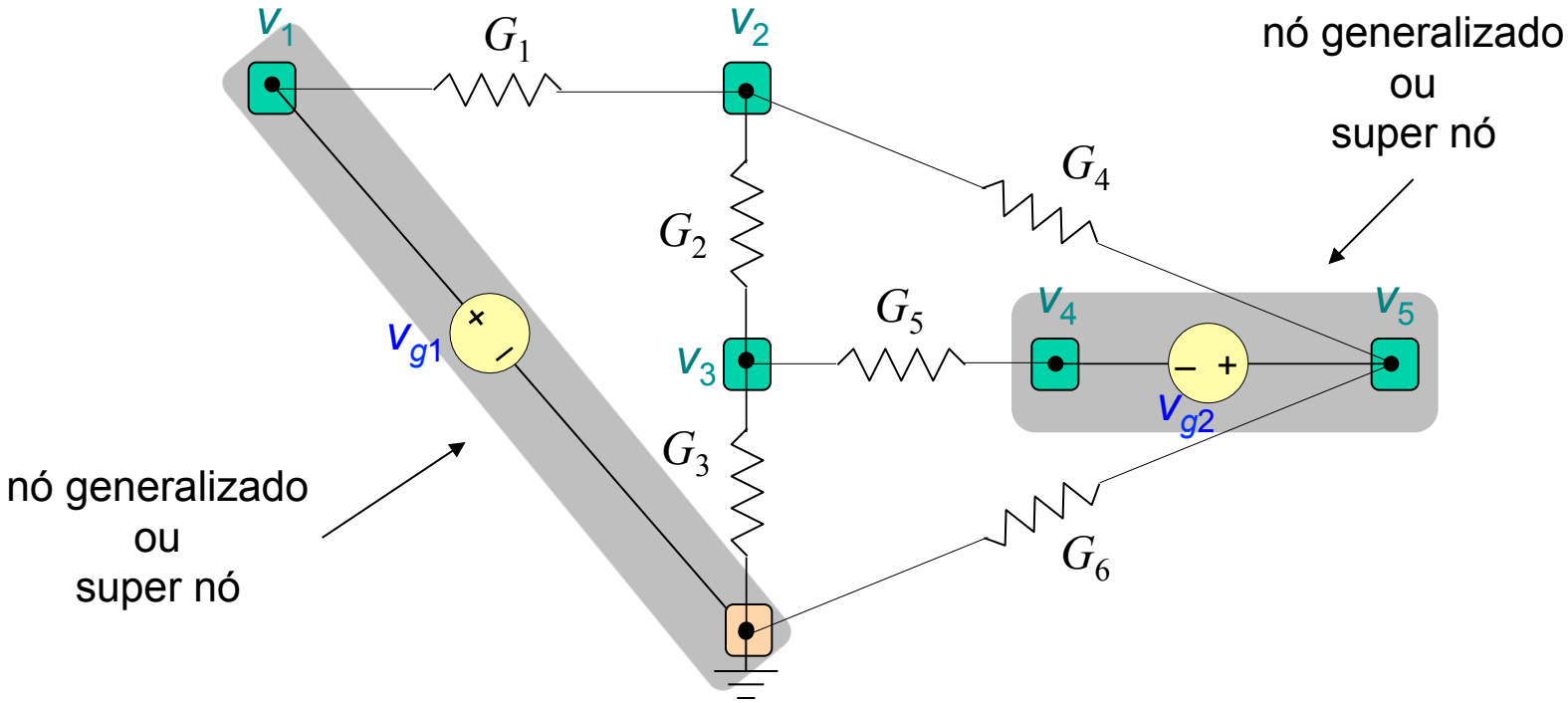
Exemplo 1:



Note que:

$v_{g1} = v_1$

$v_{g2} = v_5 - v_4$



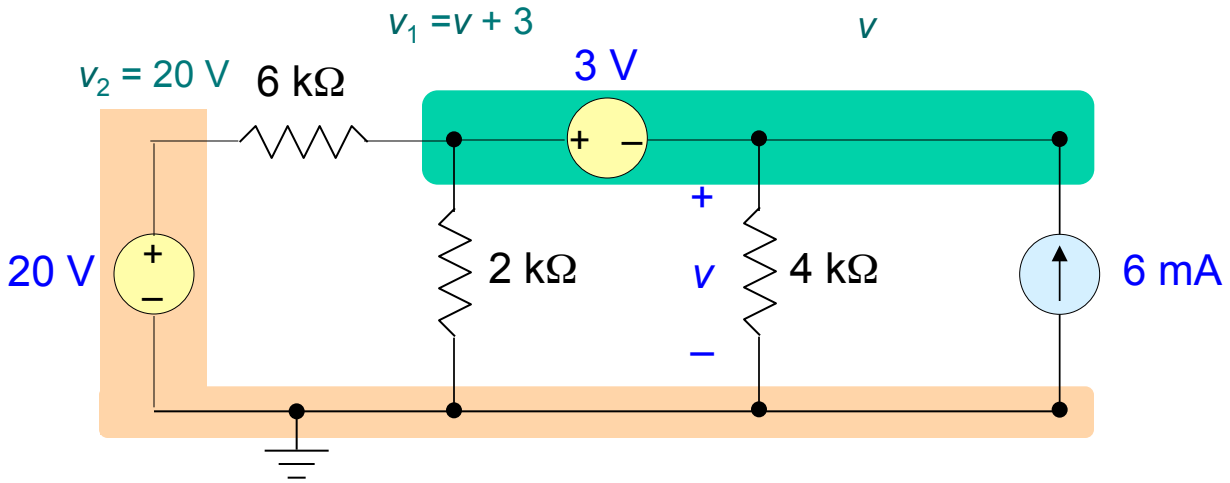
Lei de Kirchhoff de corrente se aplica também em nós generalizados.

Nó v_2: $(G_1 + G_2 + G_4)v_2 - G_1 v_1 - G_2 v_3 - G_4 v_5 = 0$

Nó v_3: $(G_2 + G_3 + G_5)v_3 - G_2 v_2 - G_5 v_4 = 0$

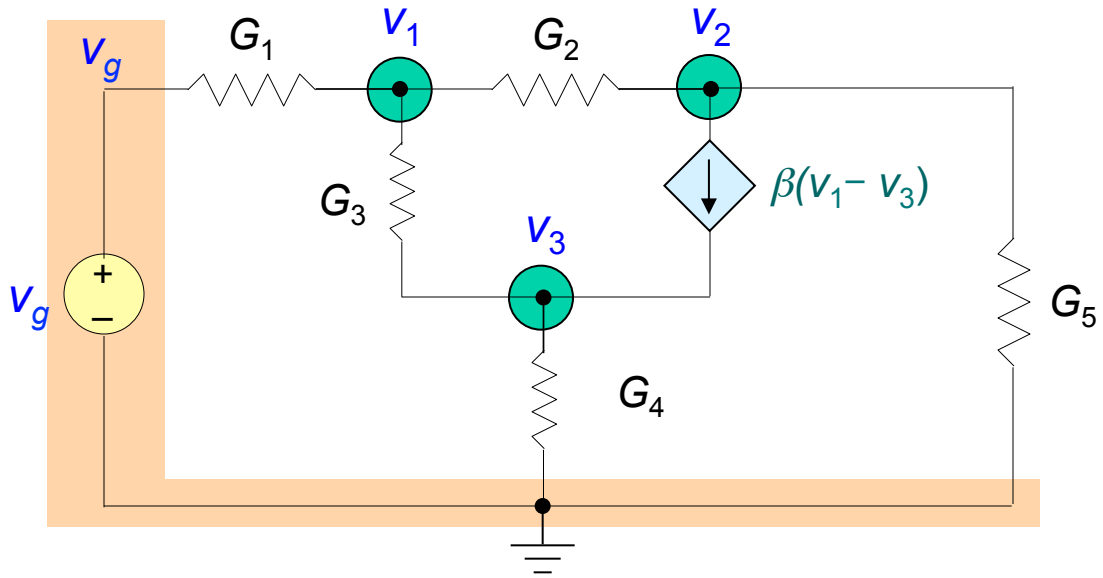
Nó generalizado v_{g2}: $G_4(v_5 - v_2) + G_5(v_4 - v_3) + G_6 v_5 = 0$ (correntes que deixam o nó)

Exemplo 2:



Nó generalizado superior: $$\frac{v+3-20}{6}+\frac{v+3}{2}+\frac{v}{4}=6 \quad \Rightarrow \quad v=8 \ [\mathrm{V}]$$

Exemplo 3:



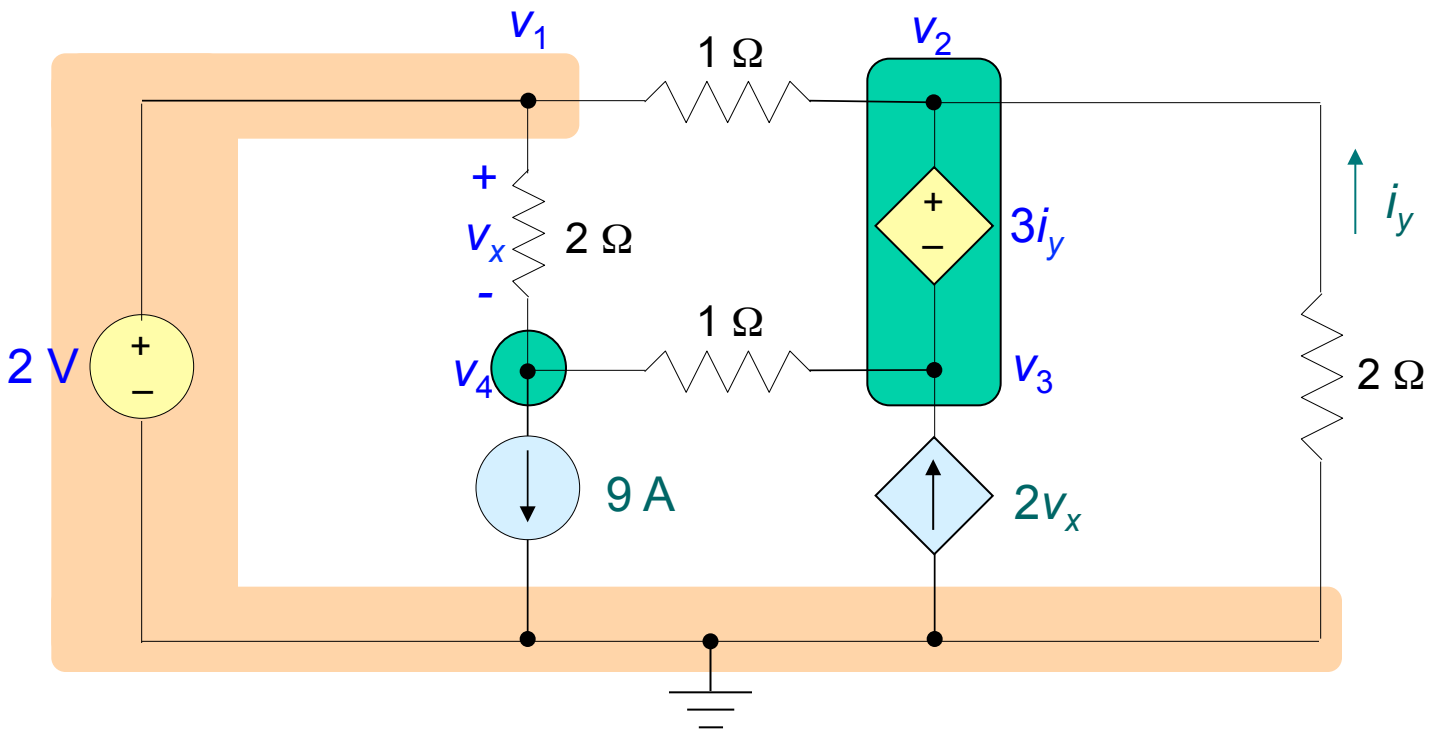
Aplicando Lei de Kirchhoff de corrente nos nós, obtemos:

Nó v_1: $$(G_1 + G_2 + G_3)v_1 - G_1 v_g - G_2 v_2 - G_3 v_3 = 0$$

Nó v_2: $$(G_2 + G_5)v_2 - G_2 v_1 = -\beta(v_1 - v_3)$$

Nó v_3: $$(G_3 + G_4)v_3 - G_3 v_1 = \beta(v_1 - v_3)$$

Exemplo 4:



$v_1 = 2$ [V]

$v_2 - v_3 = 3i_y$ ⟹ $v_3 = -3i_y + v_2 = -5i_y$

$v_1 - v_4 = v_x$ ⟹ $v_4 = -v_x + v_1 = 2 - v_x$

$v_2 = -2i_y$

Nó v_4: $-\dfrac{v_x}{2} + 9 + \dfrac{v_4 - v_3}{1} = 0$

Nó generalizado:

$$\frac{v_2 - v_1}{1} - i_y - 2v_x + \frac{v_3 - v_4}{1} = 0$$

Substituindo as tensões:

$$-\frac{v_x}{2}+9+\frac{v_4-v_3}{1}=0 \Rightarrow -\frac{v_x}{2}+9+\frac{2-v_x-(-5i_y)}{1}=0 \Rightarrow -3v_x+10i_y=-22$$

$$\frac{v_2-v_1}{1}-i_y-2v_x+\frac{v_3-v_4}{1}=0 \Rightarrow \frac{-2i_y-2}{1}-i_y-2v_x+\frac{-5i_y-(2-v_x)}{1}=0 \Rightarrow -v_x-8i_y=4$$

Resolvendo: $v_x=4\ [\mathrm{V}]$ $i_y=-1\ [\mathrm{A}]$

$v_2 = -2i_y = 2$ [V]

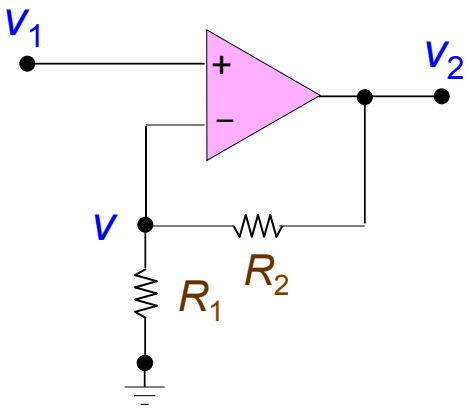
$v_3 = -5i_y = 5$ [V]

$v_4 = 2 - v_x = -2$ [V]

4.4 Circuitos Contendo Amplificadores Operacionais

Nós são facilmente identificáveis para o método nodal mas os laços não são.

Exemplo: Fonte de tensão controlada por tensão.

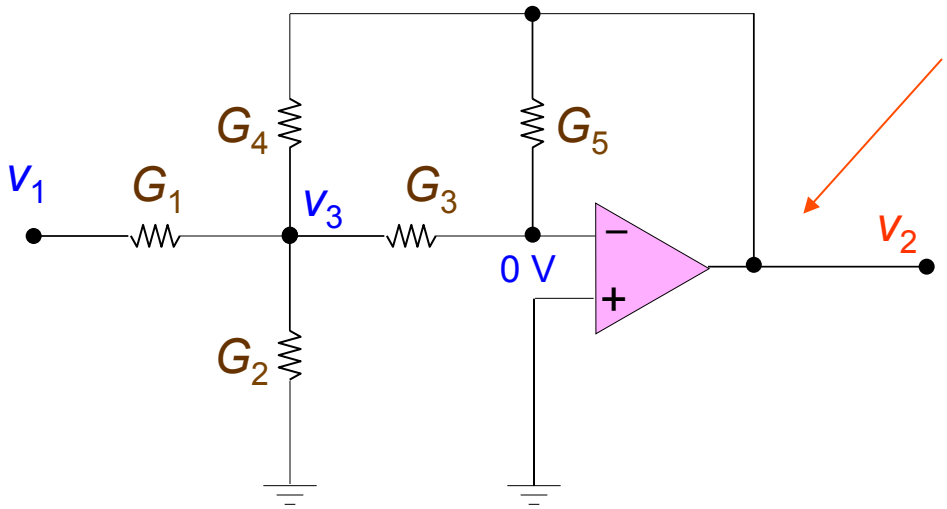


$$v = v_1$$

Equação do nó *v*: $\dfrac{v_1}{R_1} + \dfrac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$

$$v_2 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_1 = \mu \cdot v_1$$

Exemplo: Obter v_2.



Evitar usar este nó, pois a corrente do op-amp é difícil de determinar!!!

Nó v_3: $(G_1 + G_2 + G_3 + G_4)v_3 - G_1 v_1 - G_4 v_2 = 0$

Correntes no nó inversor do op-amp: $G_3 v_3 + G_5 v_2 = 0 \Rightarrow v_3 = -\dfrac{G_5 v_2}{G_3}$

$$(G_1 + G_2 + G_3 + G_4)\left(-\frac{G_5 v_2}{G_3}\right) - G_1 v_1 - G_4 v_2 = 0 \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{-G_1 G_3 v_1}{G_5(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + G_3 G_4}}$$

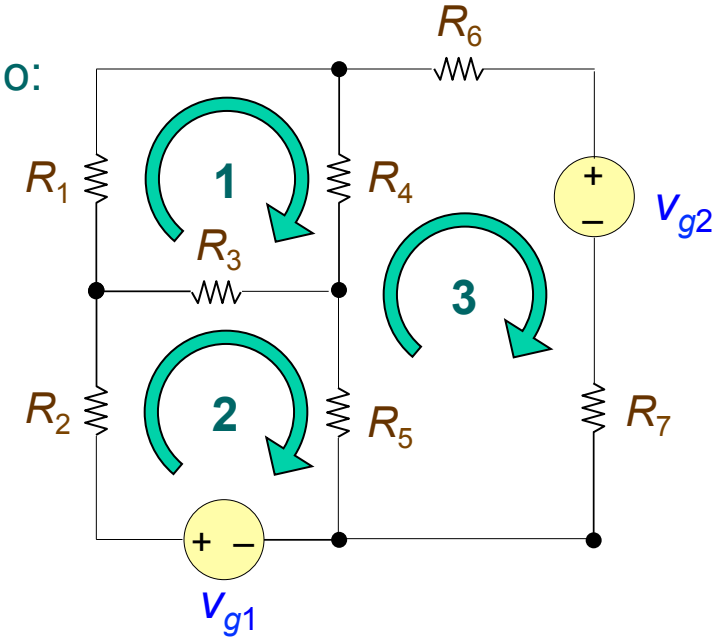
4.5 Análise de Malhas ou de Laços

Análise de Malhas:

- aplica-se a Lei de Kirchhoff das Tensões em volta de um percurso fechado (malha) de um circuito.
- análise de circuitos planares.

Malha é um laço que não contém elementos dentro de si.

Exemplo:

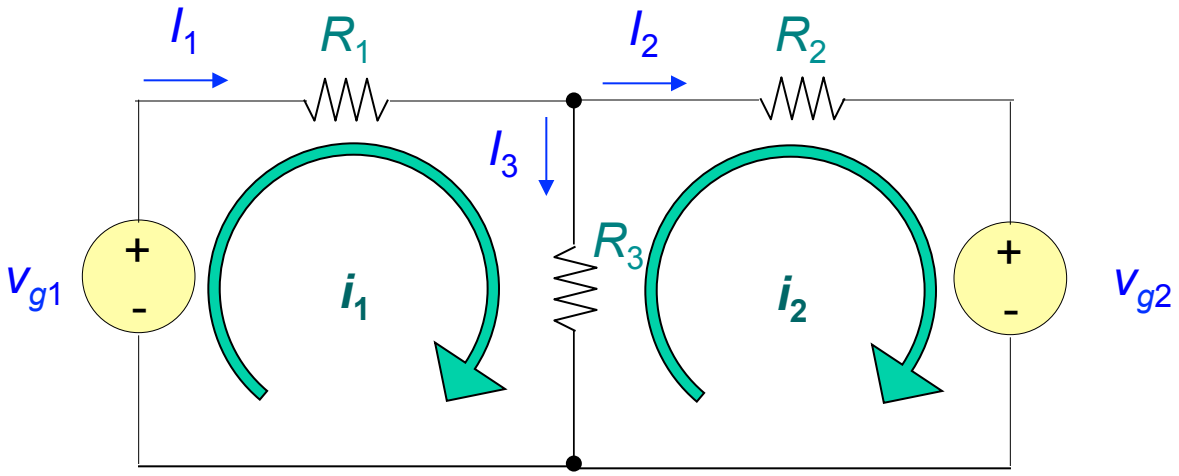


malha 1: R_1, R_4 e R_3

malha 2: R_2, R_3, R_5 e v_{g1}

malha 3: R_5, R_4, R_6, v_{g2} e R_7

Exemplo:



As correntes nos elementos são: I_1, I_2 e I_3

Lei de Kirchhoff das tensões na malha 1: $R_1 I_1 + R_3 I_3 = v_{g1}$

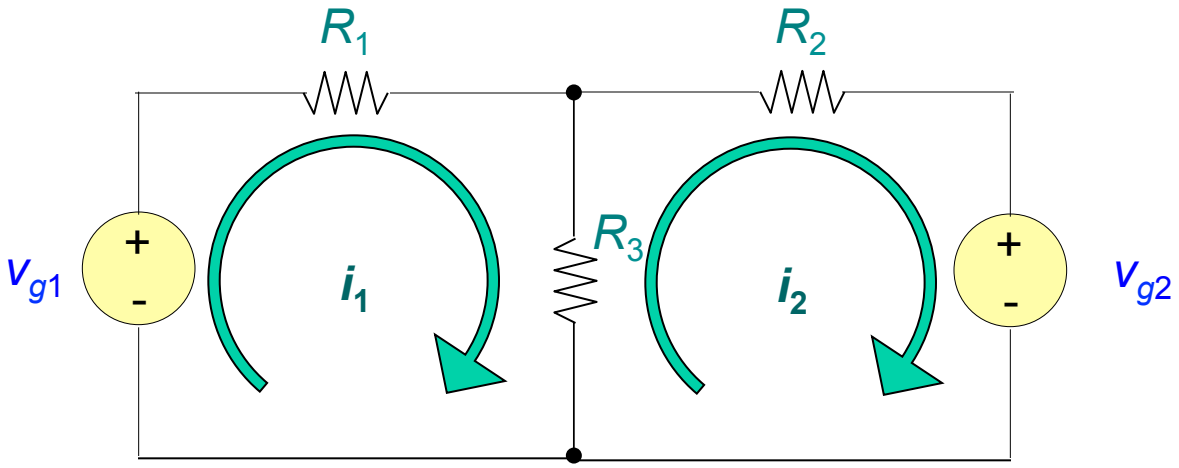
Lei de Kirchhoff das tensões na malha 2: $R_2 I_2 - R_3 I_3 = -v_{g2}$

A corrente através de um elemento é a soma algébrica das correntes de malha.

Em R_1 temos $I_1 = i_1$

Em R_2 temos $I_2 = i_2$

Em R_3 temos $I_3 = i_1 - i_2$



Equações de malha do circuito:

$$R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = v_{g1}$$

$$R_2 i_2 + R_3(i_2 - i_1) = -v_{g2}$$

Soma das resistências da 1ª malha × i_1

Valor negativo da resistência comum a 2ª malha × i_2

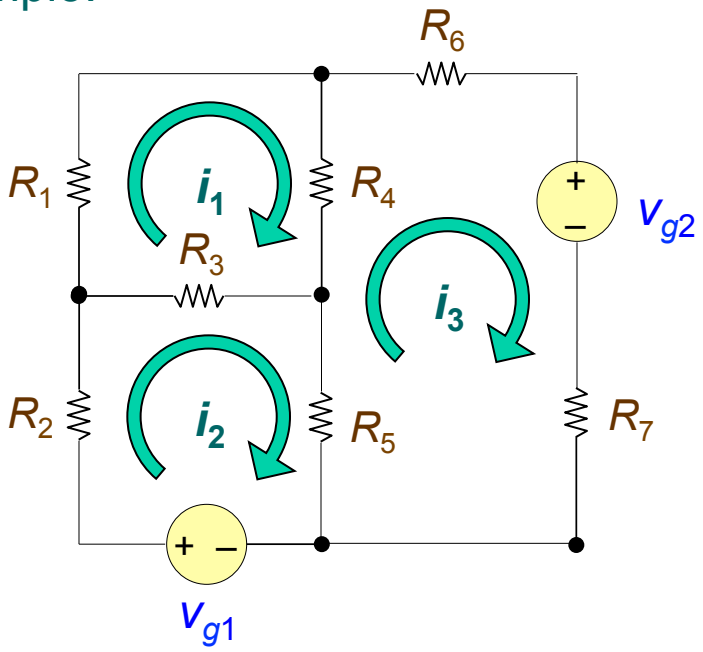
Rearranjando:

$$(R_1 + R_3)i_1 - R_3 i_2 = v_{g1}$$

$$-R_3 i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = -v_{g2}$$

Obs: Só vale se as correntes de malha tiverem o mesmo sentido!

Exemplo:



$$(R_1 + R_3 + R_4)i_1 - R_3 i_2 - R_4 i_3 = 0$$

$$(R_2 + R_3 + R_5)i_2 - R_3 i_1 - R_5 i_3 = v_{g1}$$

$$(R_4 + R_5 + R_6 + R_7)i_3 - R_4 i_1 - R_5 i_2 = -v_{g2}$$

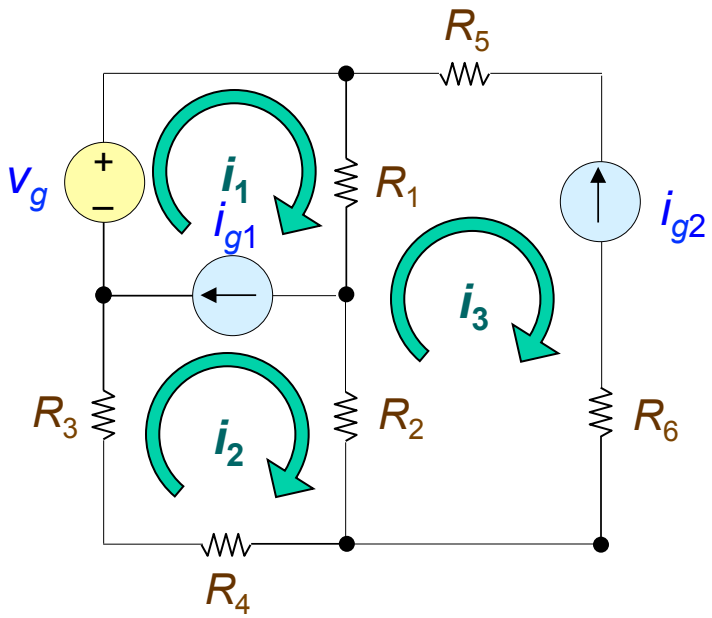
Determinante para se obter as correntes pela regra de Cramer:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_3 & -R_4 \\ -R_3 & R_2 + R_3 + R_5 & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{vmatrix}$$

4.6 Circuitos Contendo Fontes de Corrente

Análise das malhas é mais fácil.

Exemplo:

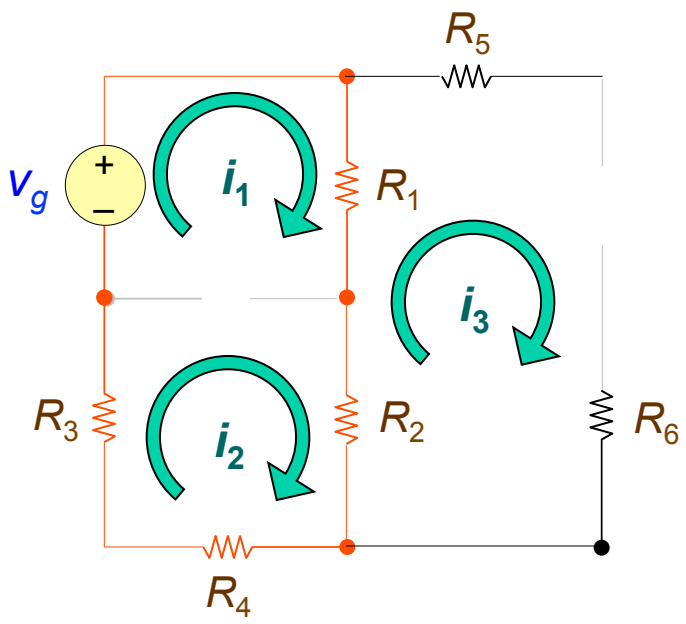


Restrições:

$$i_1 - i_2 = i_{g1}$$

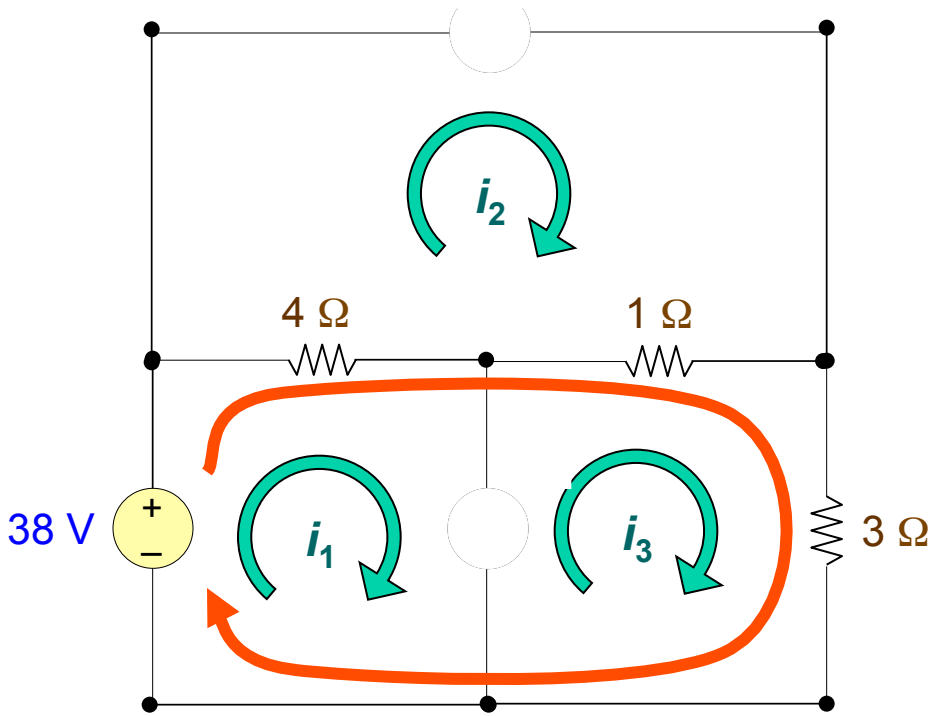
$$i_3 = -i_{g2}$$

Remover as fontes de corrente para obter uma malha adequada para a 3ª equação.



Lei de Kirchhoff de tensões: $R_1(i_1 - i_3) + R_2(i_2 - i_3) + R_4 i_2 + R_3 i_2 = v_g$

Exemplo: Correntes de malha



$$i_2 = -2 \text{ A}$$

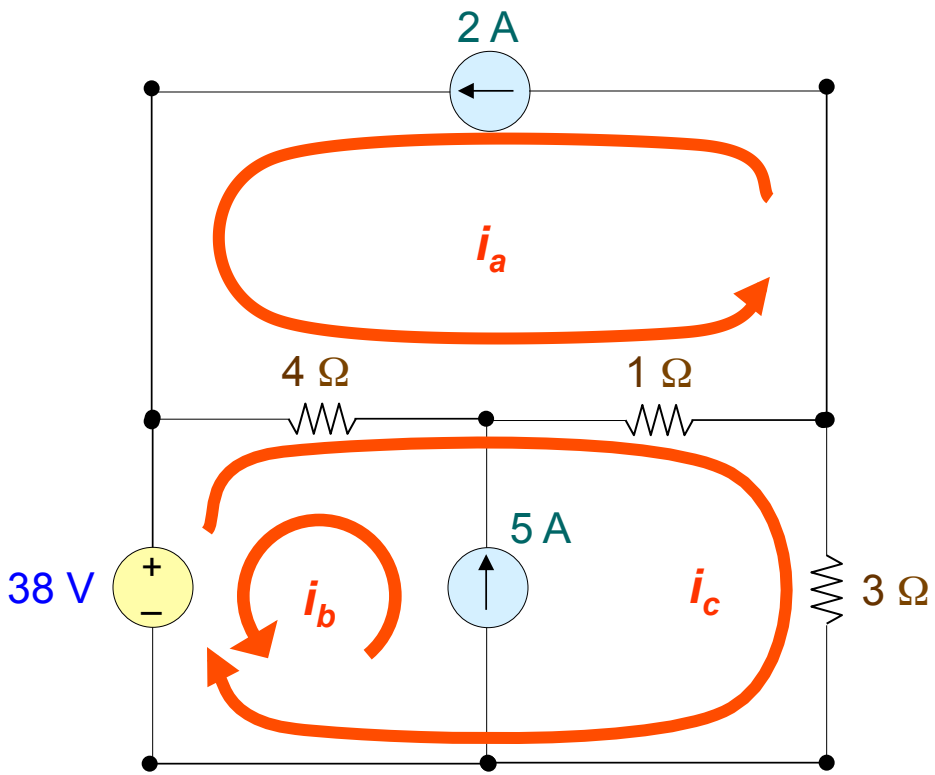
$$i_3 - i_1 = 5 \text{ A}$$

$$\boxed{4(i_1 - i_2) + 1(i_3 - i_2) + 3i_3 = 38}$$

$$i_1 = 1 \text{ A}$$

$$i_3 = 6 \text{ A}$$

Resolvendo usando correntes de laço (determinar a corrente que desce por R_3):



Inspeção: $i_a = 2\ \text{A}$

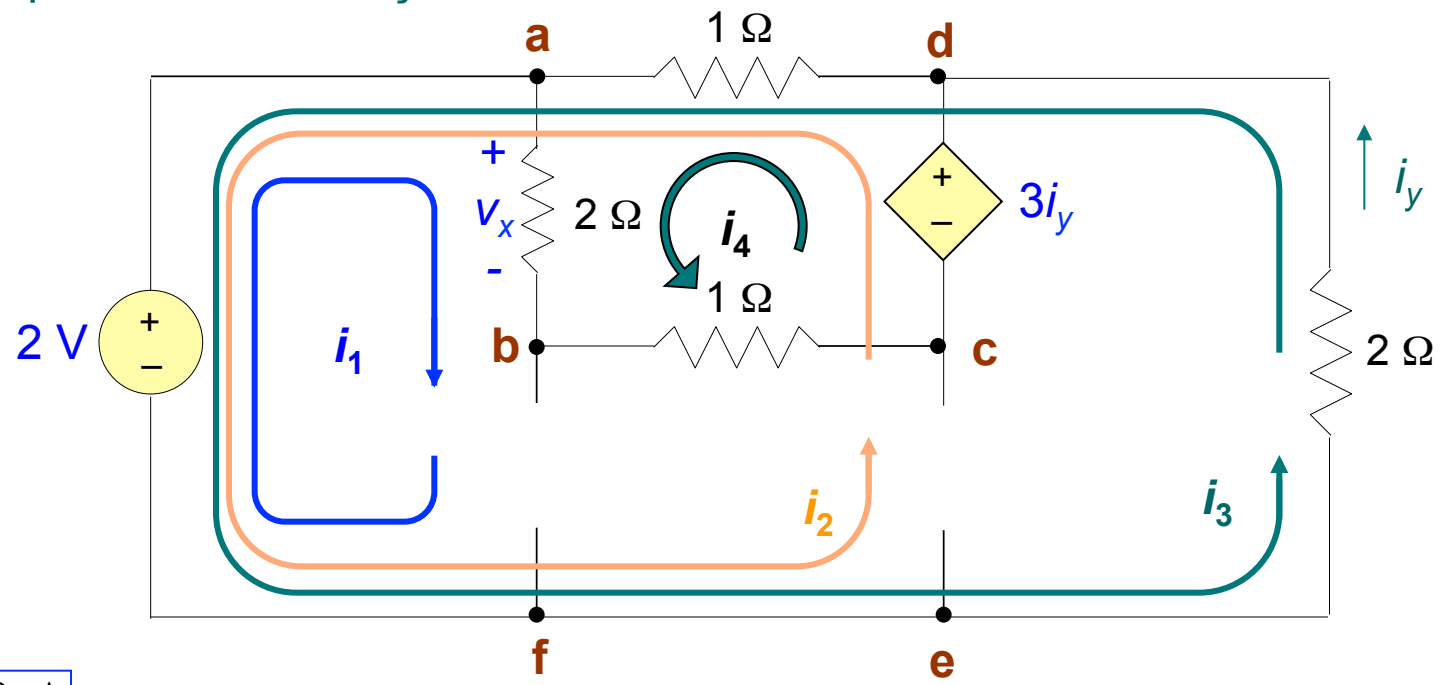
$i_b = 5\ \text{A}$

Lei de Kirchhoff das tensões:

$$4(i_a - i_b + i_c) + 1(i_a + i_c) + 3i_c = 38$$

$$4(2 - 5 + i_c) + 1(2 + i_c) + 3i_c = 38 \Rightarrow i_c = 6\ \text{A}$$

Exemplo: Análise de laços



$i_1 = 9 \text{ A}$

$i_2 = 2v_x$

$i_3 = i_y$

$$2(i_1 + i_4) = v_x \quad \Rightarrow \quad i_4 = \frac{v_x}{2} - 9$$

Imaginando fontes de corrente abertas:

Laço abcda: $v_x + 1(i_4) - 3i_y + 1(i_2 + i_3 + i_4) = 0$

Laço afeda: $2 + 2(i_3) + 1(i_2 + i_3 + i_4) = 0$

$\Rightarrow$ $v_x = 4 \text{ V}$ $\quad i_y = -1 \text{ A}$

4.7 Dualidade

Similaridade entre pares de equações:

Lei de Ohm:

$$\begin{array}{ccccc} v & = & R & i \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & \Updownarrow \\ i & = & G & v \end{array}$$

Resistores em série e em paralelo:

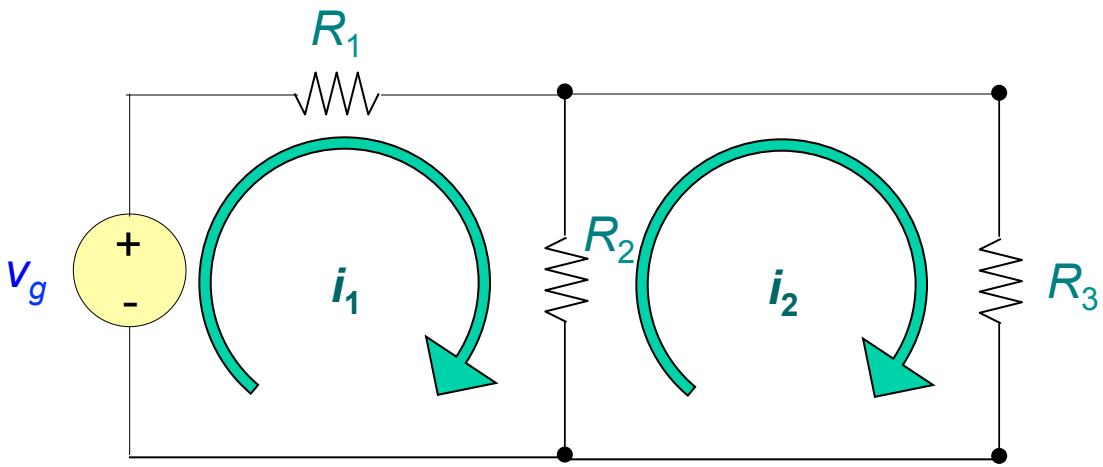
$$\begin{array}{ccccccccc} R_s & = & R_1 & + & R_2 & + & \cdots & + & R_n \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & & & \Updownarrow \\ G_p & = & G_1 & + & G_2 & + & \cdots & + & G_n \end{array}$$

Dualidade entre corrente e tensão, resistência e condutância, série e paralelo.

Além disso, curto circuito e circuito aberto também são duais, pois:

$$\begin{array}{ccc} v & = & 0 \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ i & = & 0 \end{array}$$

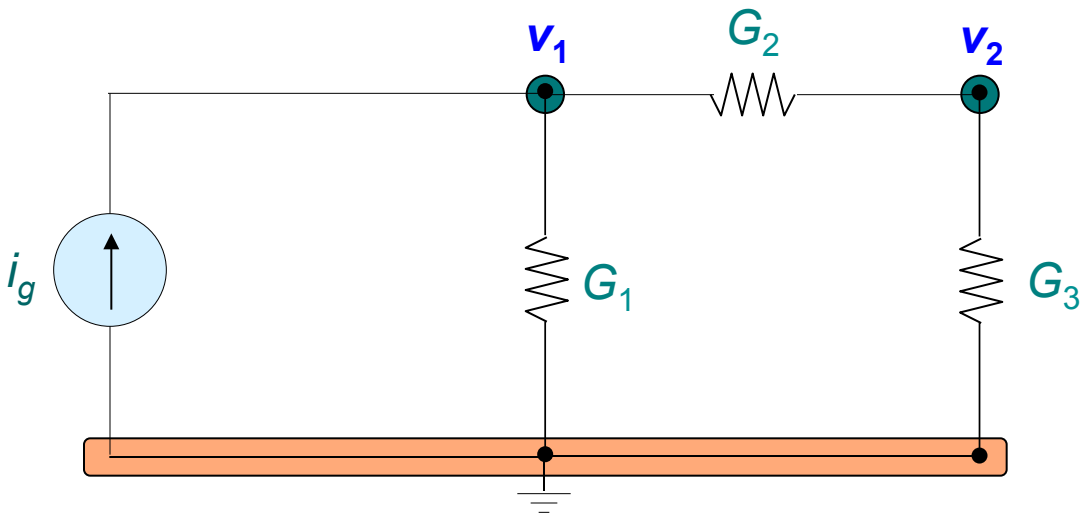
Exemplo: Circuitos duais



$$(R_1 + R_2)i_1 - R_2 i_2 = v_g$$

$$-R_2 i_1 + (R_2 + R_3)i_2 = 0$$

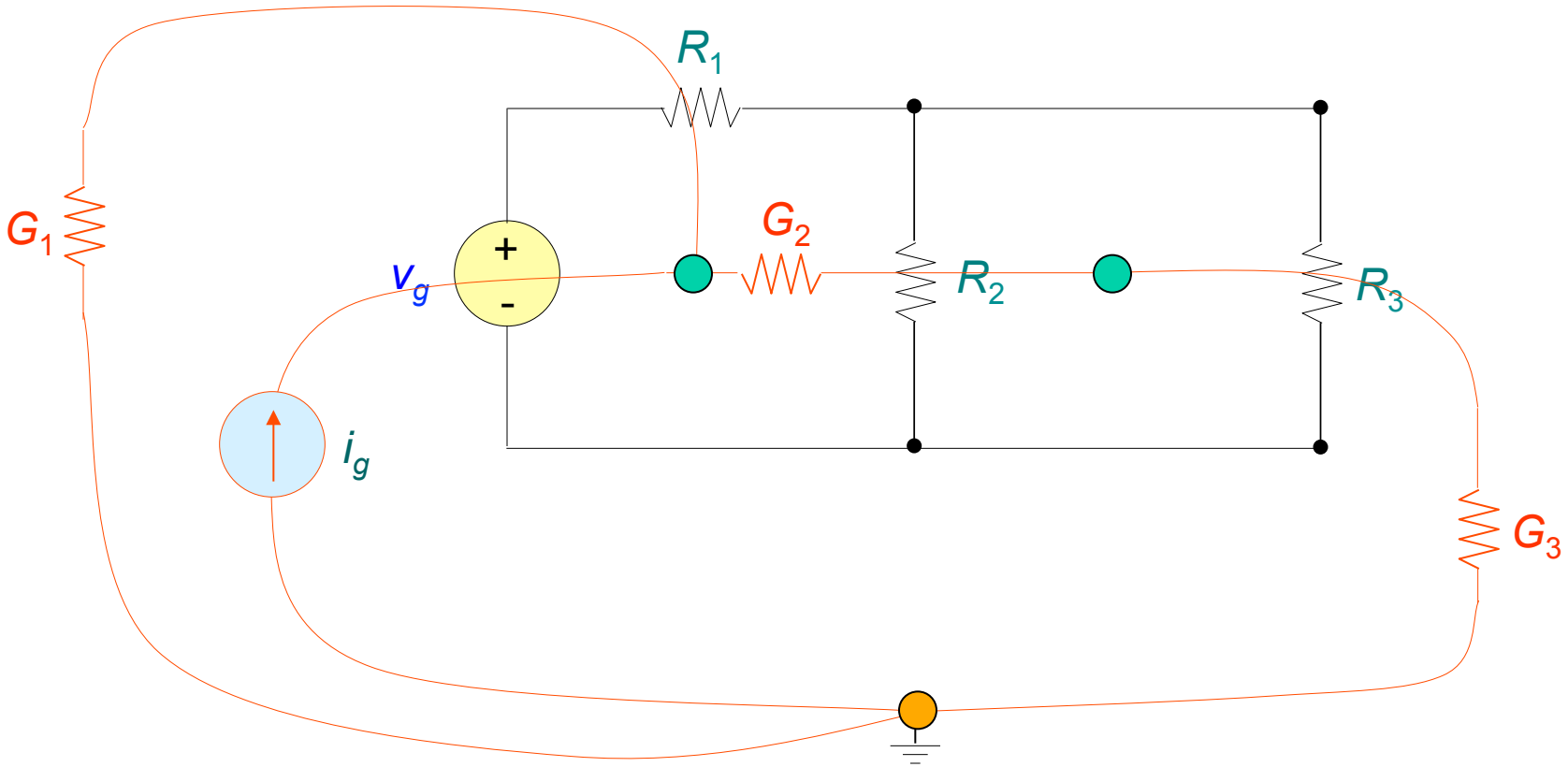
Circuito dual:



$$(G_1 + G_2)v_1 - G_2 v_2 = i_g$$

$$-G_2 v_1 + (G_2 + G_3)v_2 = 0$$

Valores numéricos de v_1 e v_2 são iguais aos de i_1 e i_2.

Existe ainda a dualidade:

- nó e malha.
- nó de referência e região de contorno da parte externa ao circuito (malha externa).