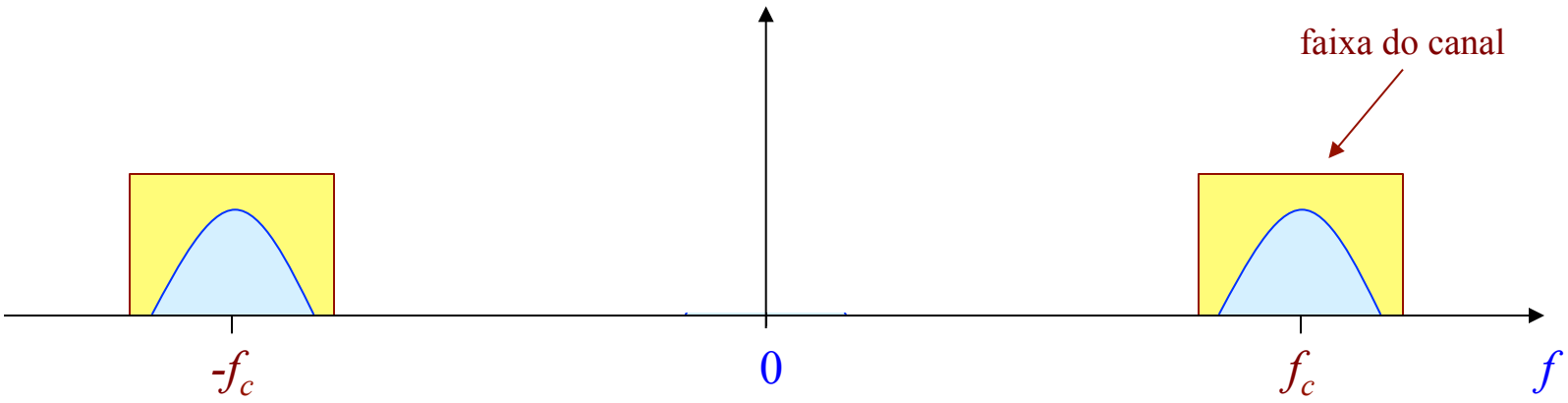
Capítulo 3

Modulação Analógica e Ruído

1. INTRODUÇÃO

Transmissão de sinais mensagens por um canal de comunicações passa faixa requer um deslocamento deste sinal para a faixa onde se encontra o canal.



Tipos de modulação analógica:

- modulação de amplitude
- modulação angular

2. MODULAÇÃO DE AMPLITUDE (AM)

Modulação de amplitude é definida como um processo no qual a amplitude da onda portadora $c(t)$ varia linearmente segundo o sinal mensagem $m(t)$.

Portadora: $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

Forma padrão para uma onda modulada em amplitude:

$$s(t) = A_c[1 + k_a m(t)]\cos(2\pi f_c t)$$

k_a = sensitividade do modulador

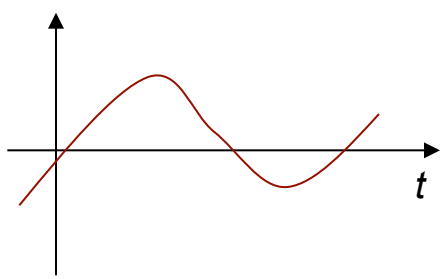
envoltória da onda AM: $a(t) = A_c|1 + k_a m(t)|$

1º caso: $|k_a m(t)| \leq 1$ para todo t:

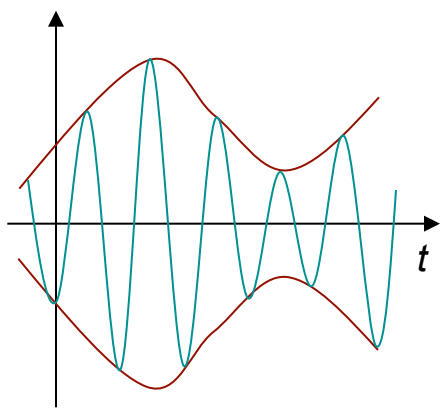
então, $1 + k_a m(t) \geq 0 \Rightarrow a(t) = A_c[1 + k_a m(t)]$ para todo t

2º caso: $|k_a m(t)| > 1$ para algum t:

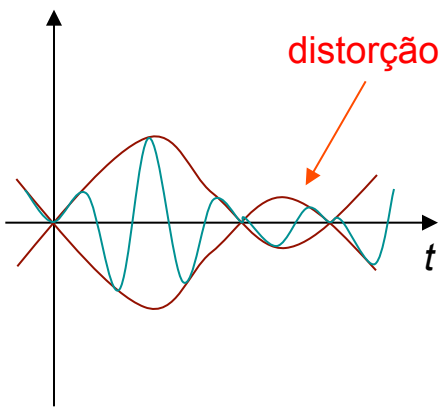
Neste caso a portadora se torna sobremodulada, resultando em uma inversão de fase quando o fator $[1 + k_a m(t)]$ cruza o zero. Assim a onda modulada apresenta uma distorção na envoltória.



sinal mensagem



sinal modulado
1º caso

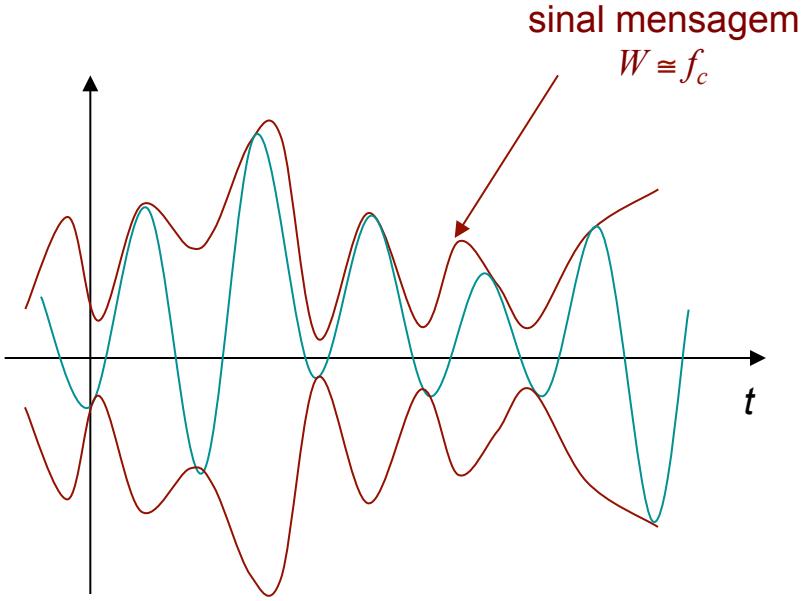


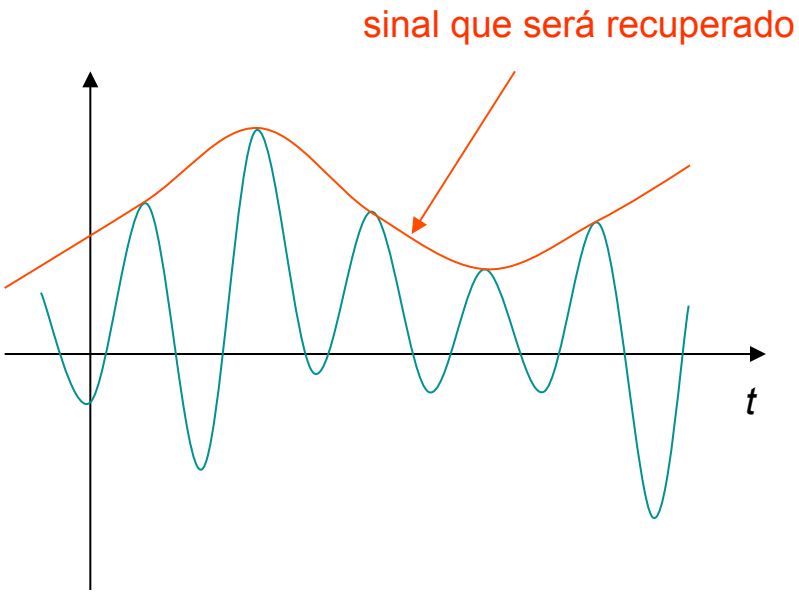
sinal modulado
2º caso

3º caso: $f_c >> W$ onde W é a largura de faixa do sinal mensagem.

Se esta condição não for satisfeita, a envoltória não poderá ser visualizada e portanto o sinal mensagem não poderá ser recuperado.

Para $f_c = W$, temos:



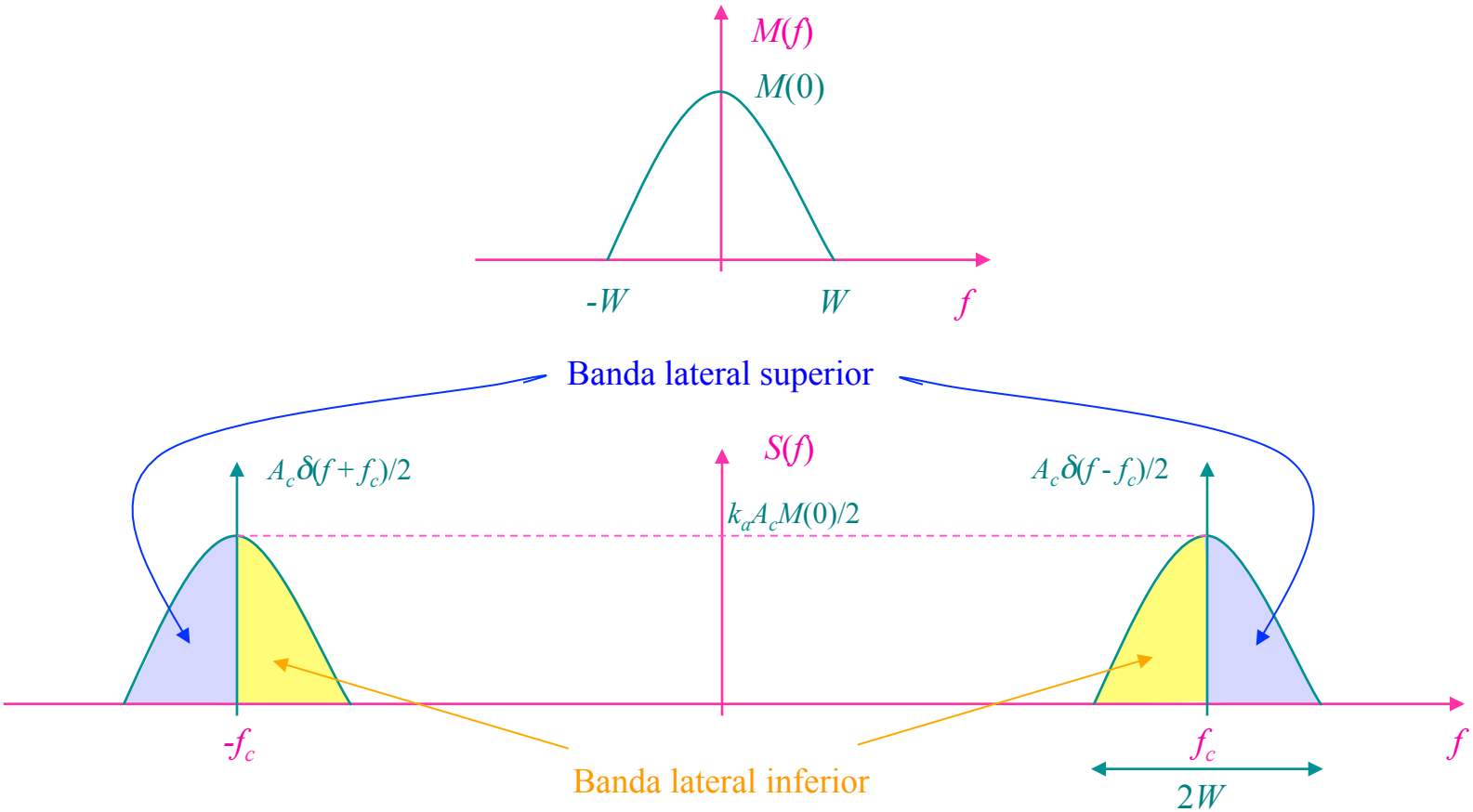


sinal recuperado ≠ sinal mensagem transmitido

Representação no domínio da frequência:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}\left[\delta(f+f_c)+\delta(f-f_c)\right]+\frac{k_a A_c}{2}\left[M(f+f_c)+M(f-f_c)\right]$$

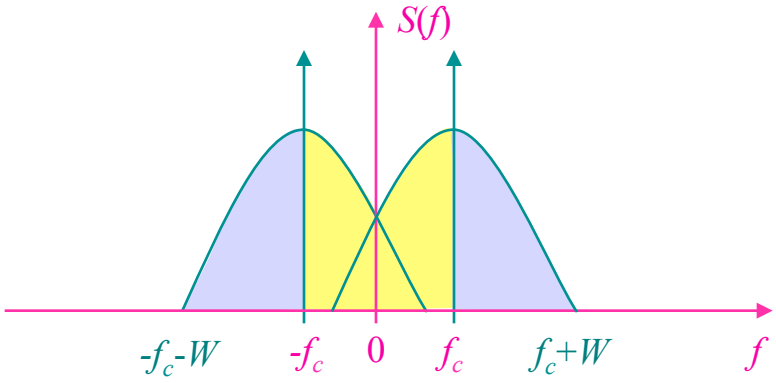
onde $M(f) \Leftrightarrow m(t)$ é o espectro do sinal mensagem passa-baixas limitado em faixa W.



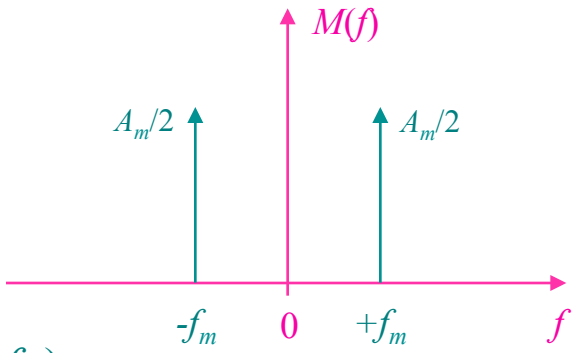
Note que a largura de faixa do sinal mensagem é W, enquanto que a largura de faixa de transmissão do sinal modulado é $2W$.

A condição de que $f_c > W$ garante a não sobreposição dos espectros da parte de frequências negativas sobre a parte das positivas.

Condição de $f_c < W$:



Exemplo: Modulação por um tom



sinal mensagem: $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

Sinal modulado: $s(t) = A_c[1 + k_a A_m \cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_c t)$

$$s(t) = A_c[1 + \mu \cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_c t)$$

$\mu = k_a A_m$ = índice de modulação ou porcentagem de modulação

$\mu < 1$ para evitar sobremodulação.

Como,

$$\frac{A_{\max}}{A_{\min}} = \frac{A_c(1+\mu)}{A_c(1-\mu)}$$

Então,

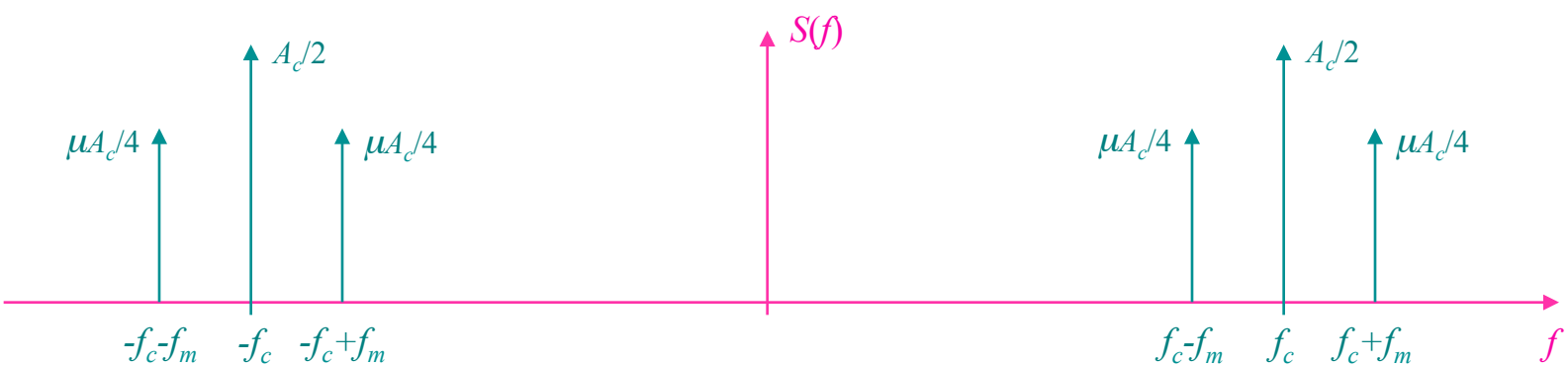
$$\boxed{\mu = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}}$$

Re-arranjando a expressão da modulação, temos:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2}\mu A_c \cos\left[2\pi\left(f_c + f_m\right)t\right] + \frac{1}{2}\mu A_c \cos\left[2\pi\left(f_c - f_m\right)t\right]$$

Assim, o espectro da onda AM fica:

$$\begin{aligned} S(f) = & \frac{1}{2}A_c\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right] \\ & + \frac{1}{4}\mu A_c\left[\delta(f - f_c - f_m) + \delta(f + f_c + f_m)\right] \\ & + \frac{1}{4}\mu A_c\left[\delta(f - f_c + f_m) + \delta(f + f_c - f_m)\right] \end{aligned}$$



Virtudes da modulação AM:

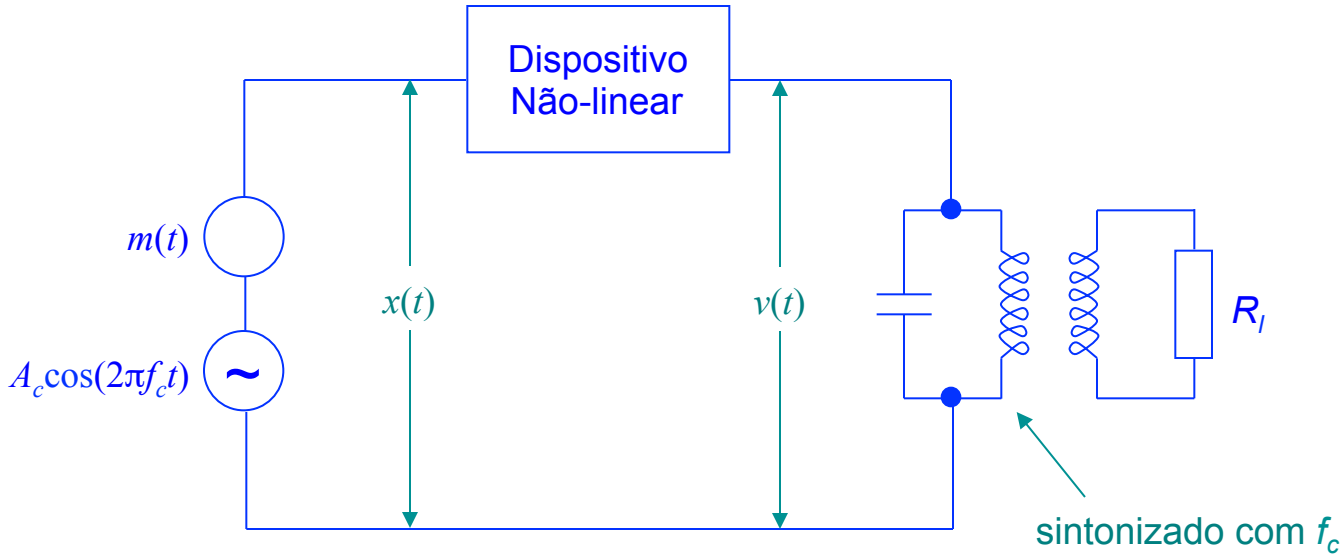
- ✓ simplicidade na implementação do modulador e do receptor. Feita utilizando dispositivos não lineares.

Limitações:

- ✓ Desperdício de potência
- ✓ Desperdício de faixa de frequência

Geração do sinal AM:

Modulador por lei quadrática:

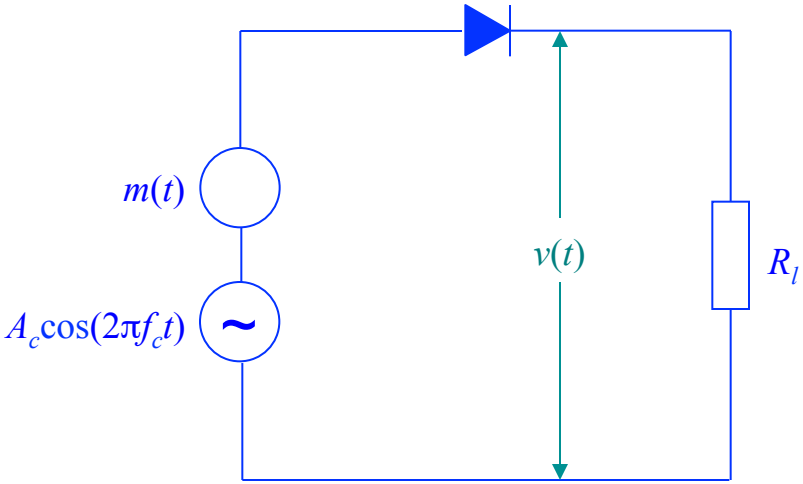


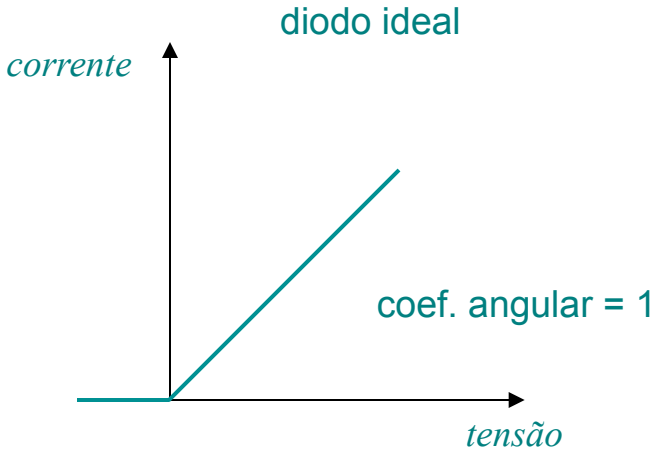
$$v(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t)$$

$$v(t) = a_1\left[A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)\right] + a_2\left[A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)\right]^2$$

$$v(t) = \underbrace{a_1 A_c\left[1 + \frac{2a_2}{a_1} m(t)\right]\cos(2\pi f_c t)}_{\text{onda AM}} + \underbrace{a_1 m(t) + a_2 m^2(t) + a_2 A_c^2 \cos^2(2\pi f_c t)}_{\text{termos indesejados}}$$

Modulador por chaveamento:





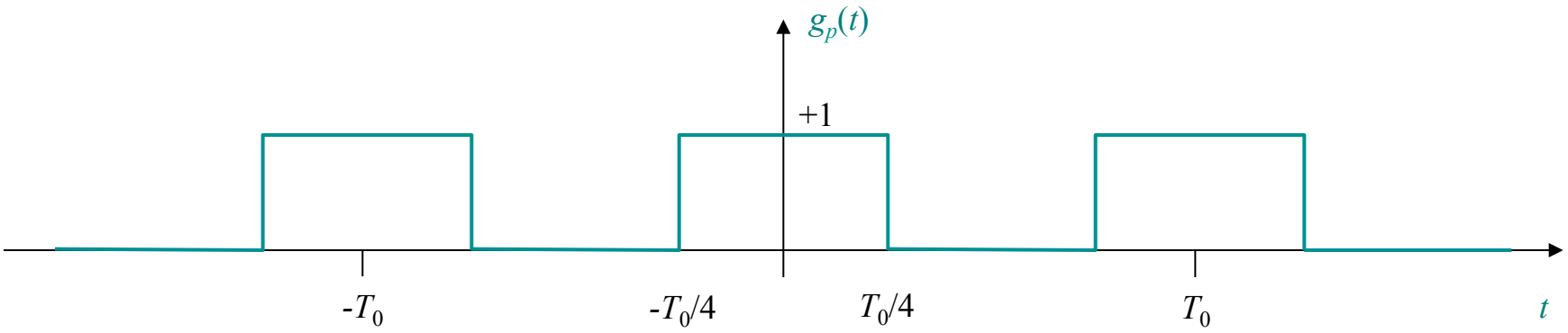
$$v(t) \cong \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t) & c(t) > 0 \\ 0 & c(t) < 0 \end{cases}$$

varia periodicamente com frequência f_c

$$c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$$

$$|m(t)| << A_c$$

$$\boxed{v(t) \cong \left[A_c \cos(2\pi f_c t) + m(t)\right] g_p(t)}$$



$$g_p(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left[2\pi f_c t(2n-1)\right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi f_c t) + \text{componentes ímpares}$$

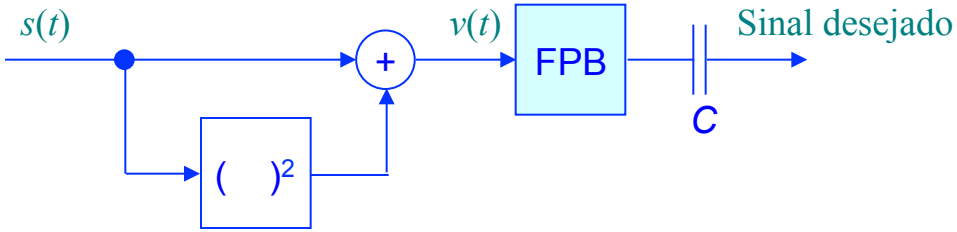
$$v(t) \cong \left[A_c\cos(2\pi f_c t) + m(t)\right]g_p(t)$$

$$\cong \underbrace{\frac{A_c}{2}\left[1 + \frac{4}{\pi A_c}m(t)\right]\cos(2\pi f_c t)}_{\text{onda AM desejada}} + \text{termos indesejados}$$

Sensitividade de amplitude: $k_a = \dfrac{4}{\pi A_c}$

Demodulação de ondas AM:

a) Detector de lei quadrática:



$s(t)$ é o sinal modulado na entrada do detector.

$$v(t) = a_1 s(t) + a_2 s^2(t)$$

$$= a_1\left[A_c\left[1 + k_a m(t)\right]\cos(2\pi f_c t)\right] + a_2\left[A_c\left[1 + k_a m(t)\right]\cos(2\pi f_c t)\right]^2$$

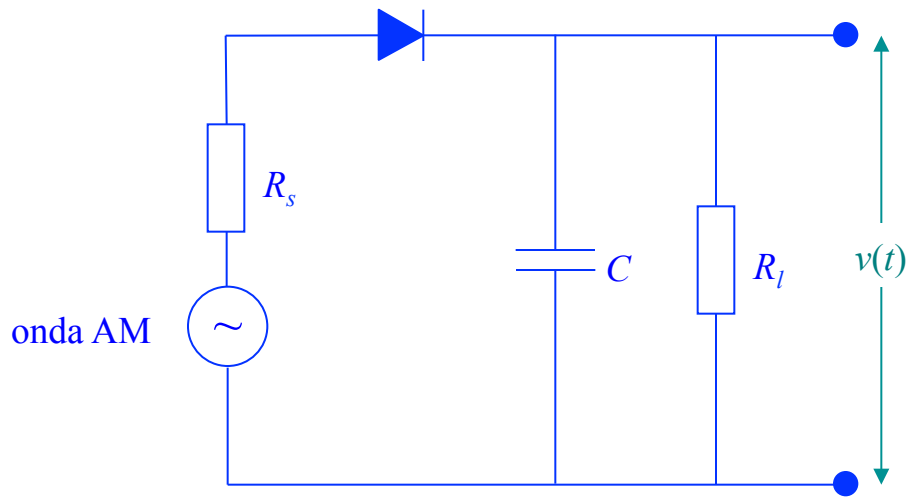
$$= a_1 A_c\left[1 + k_a m(t)\right]\cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} a_2 A_c^2\left[1 + 2k_a m(t) + k_a^2 m^2(t)\right]\left[1 + \cos(4\pi f_c t)\right]$$

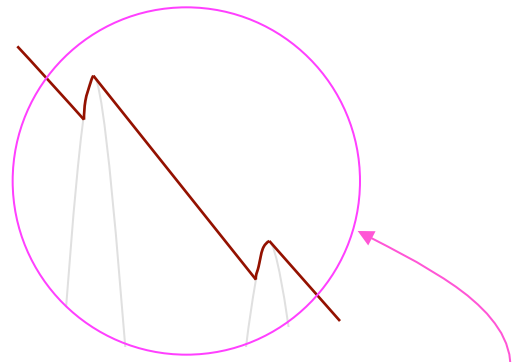
$$v(t) = \underbrace{\frac{1}{2}a_2A_c^2}_{\substack{\text{termo DC}\\ \text{eliminado}\\ \text{usando}\\ \text{1 capacitor}}} + \underbrace{a_2A_c^2k_am(t)}_{\text{sinal desejado}} + \underbrace{\frac{1}{2}a_2A_c^2k_a^2m^2(t)}_{\text{distorção}} + \underbrace{\text{termos indesejados}}_{\text{filtrados por FPB}}$$

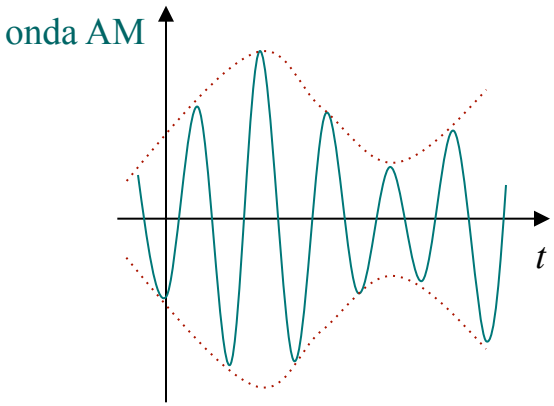
A razão sinal desejado pela distorção é igual a $2/(k_am(t))$. Então para que a distorção seja minimizada, esta razão deve ser grande, isto é $|k_am(t)|<<1$ para todo t.

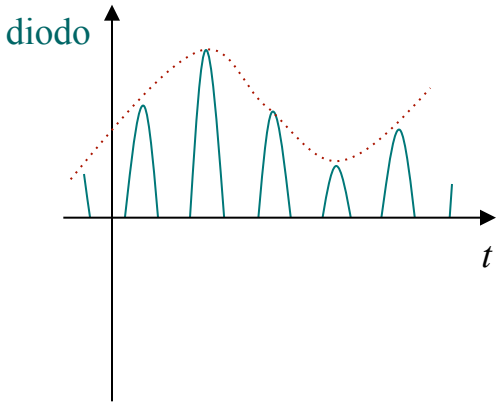
b) Detector de envoltória:

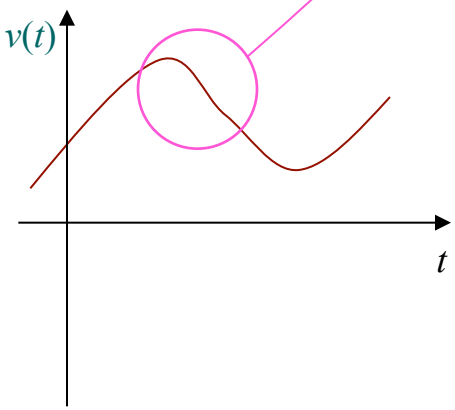
Simples e eficiente, usado na maioria dos receptores comerciais AM.



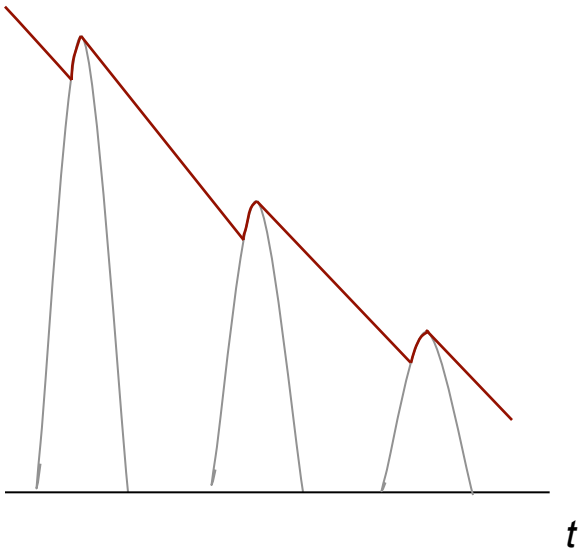




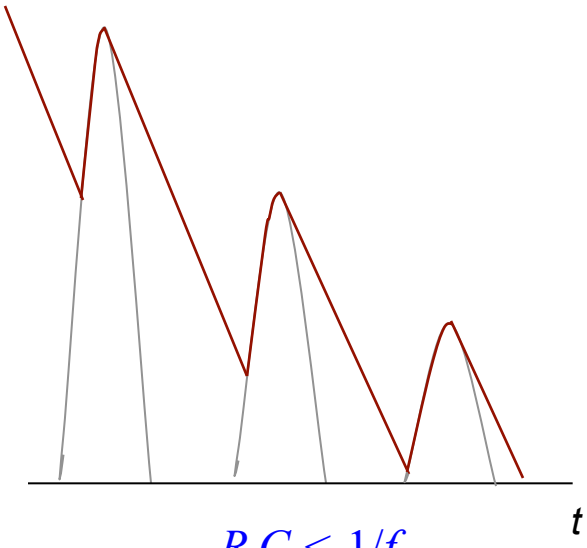




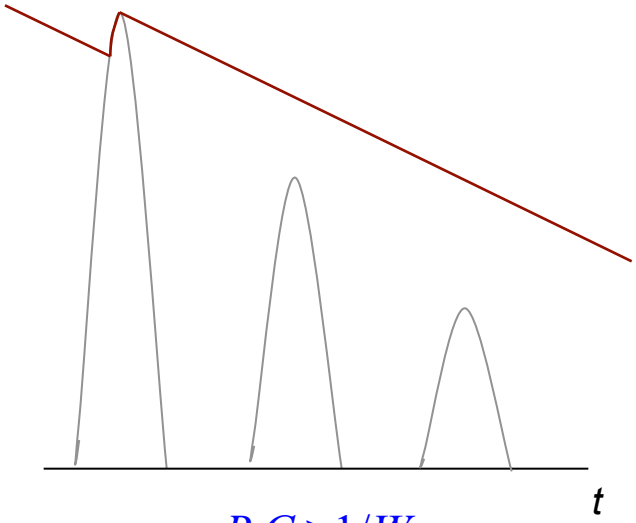
A constante de tempo $1/f_c << R_l C << 1/W$.



$1/f_c << R_lC << 1/W$



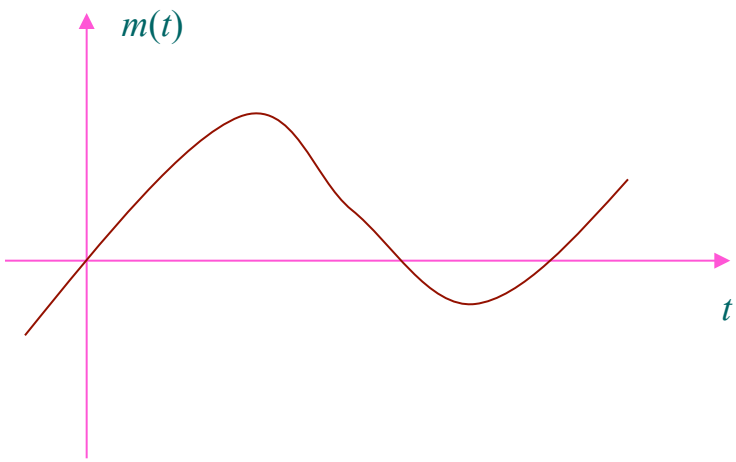
$R_lC < 1/f_c$

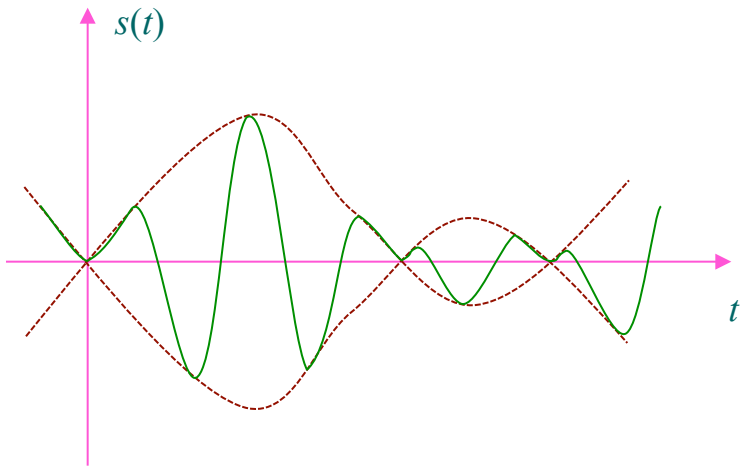


$R_lC > 1/W$

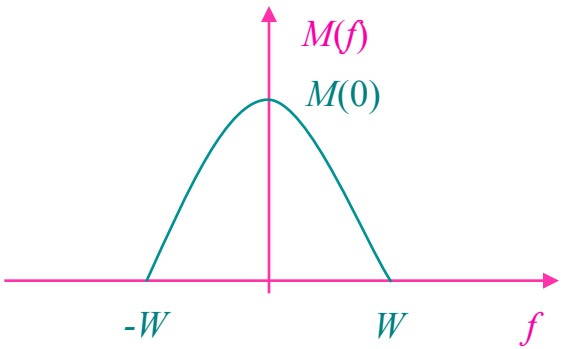
2. Modulação com banda lateral dupla sem portadora (DSB-SC)

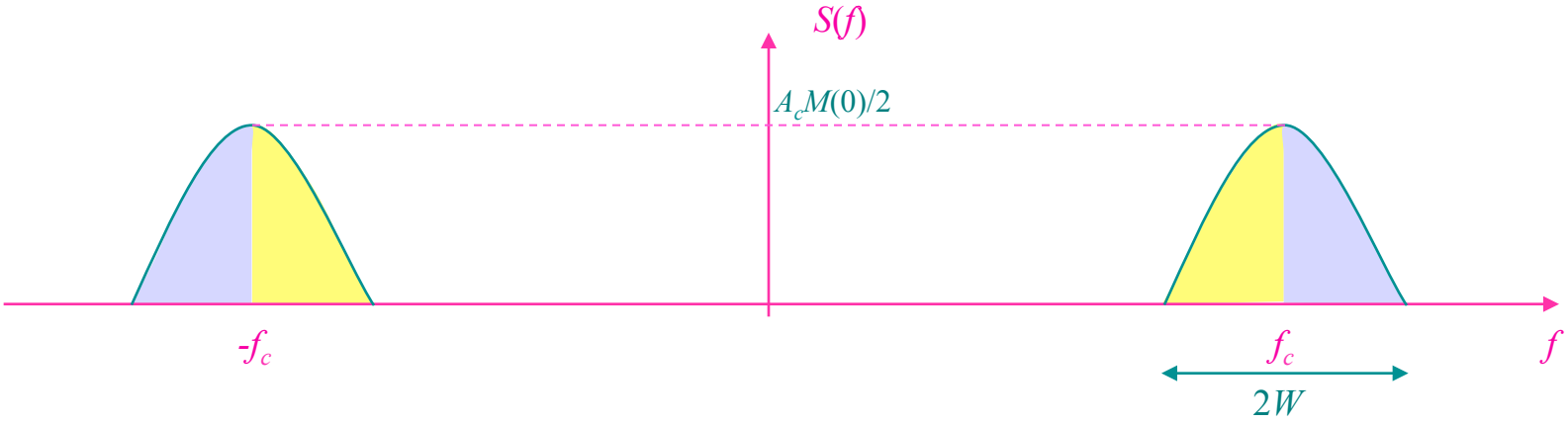
Representação no tempo: $s(t) = c(t)m(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) m(t)$





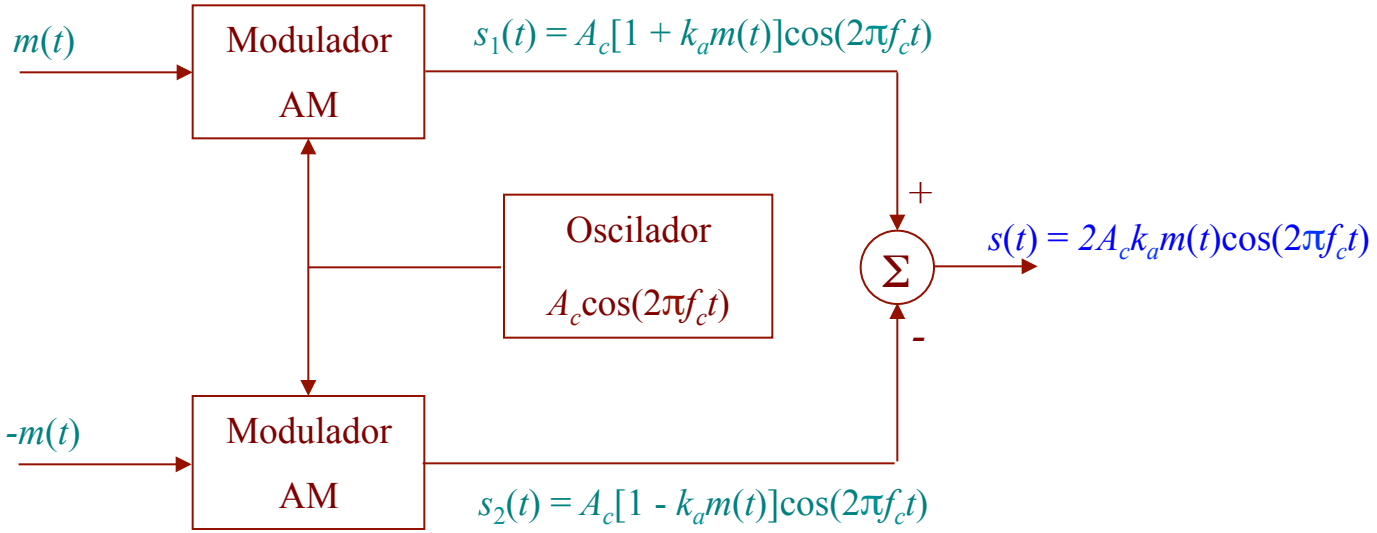
Representação em frequência: $S(f) = A_c[M(f - f_c) + M(f + f_c)]/2$



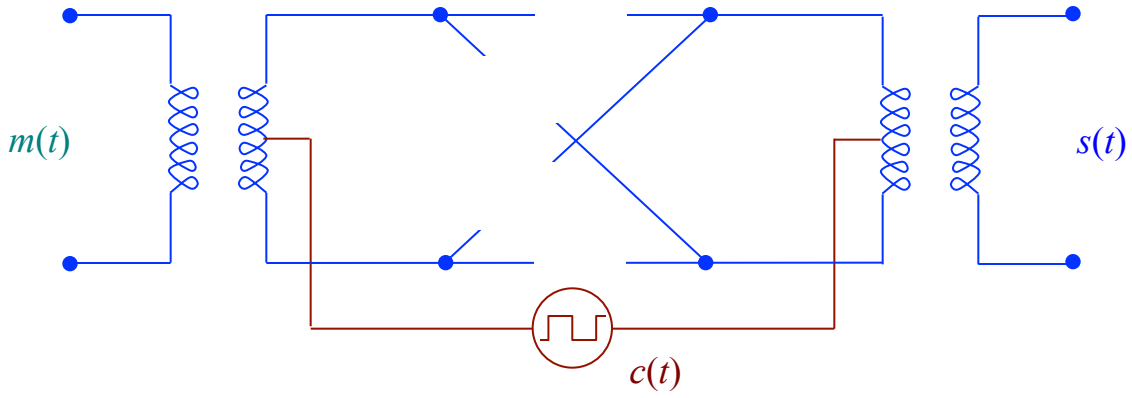


Geração de uma onda DSB-SC:

a) Modulador balanceado:

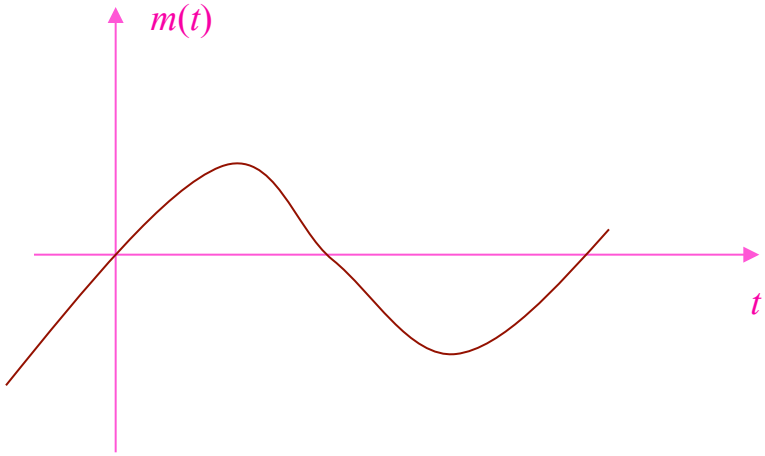


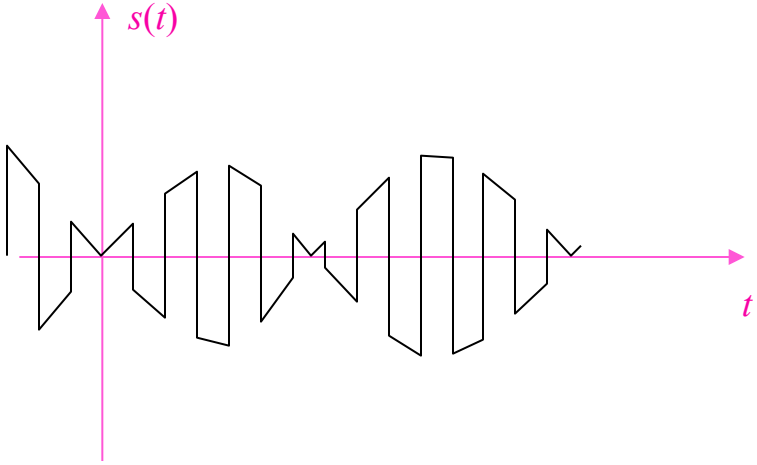
Modulador em anel:



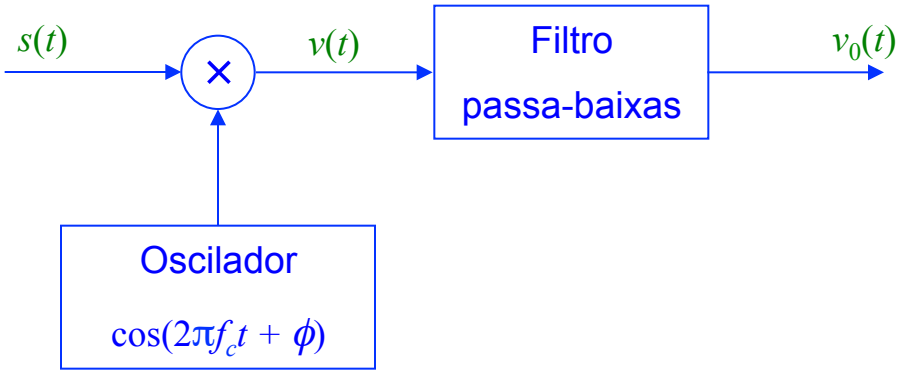
$$c(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left[2\pi f_c(2n-1)t\right]$$

$$s(t) = c(t)m(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos\left[2\pi f_c(2n-1)t\right]m(t)$$


$m(t)$
t


$s(t)$
t

Detecção coerente do DSB-SC:



$$v(t) = \cos(2\pi f_c t + \phi)\, s(t)$$

$$= \cos(2\pi f_c t + \phi)\, A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$= \underbrace{\frac{A_c}{2}\cos(\phi)\, m(t)}_{v_0(t)} + \frac{A_c}{2}\cos(4\pi f_c t + \phi)\, m(t)$$

filtrado

Note que a amplitude do sinal de saída do demodulador é máxima para $\phi = 0$ e mínima para $\phi = \pm\pi/2$.

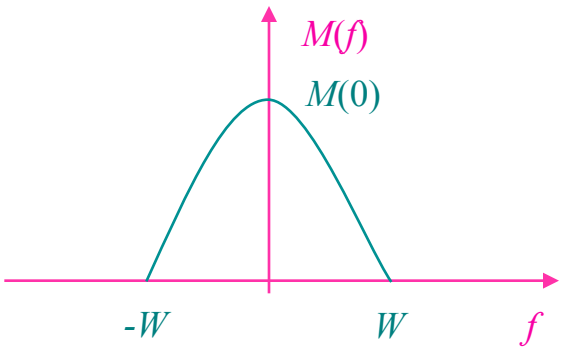
$$v_0(t) = \frac{A_c}{2}\cos(\phi)m(t)$$

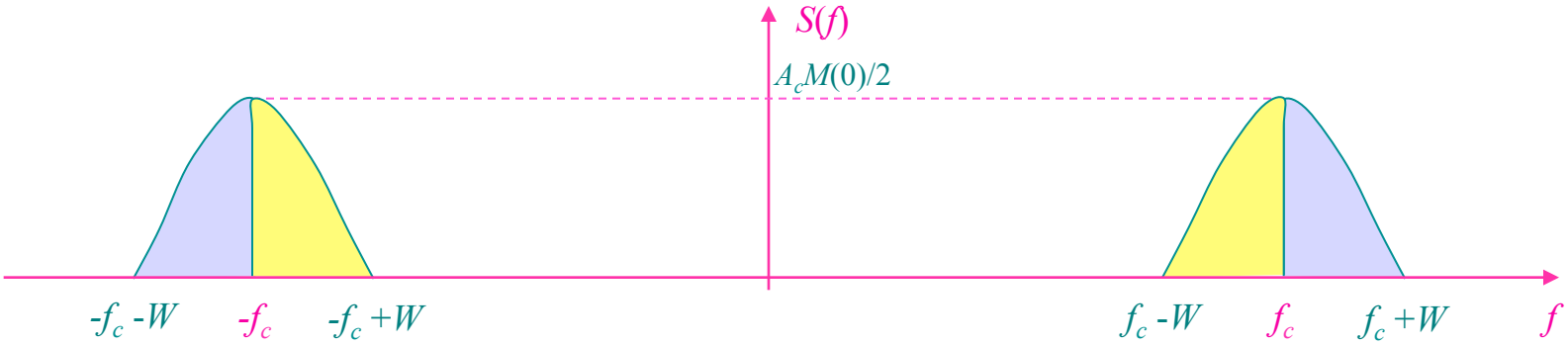
O sinal demodulado como zero é denominado de efeito nulo em quadratura.

Entretanto, se o erro de fase é constante, o detector fornece uma versão não distorcida do sinal mensagem original.

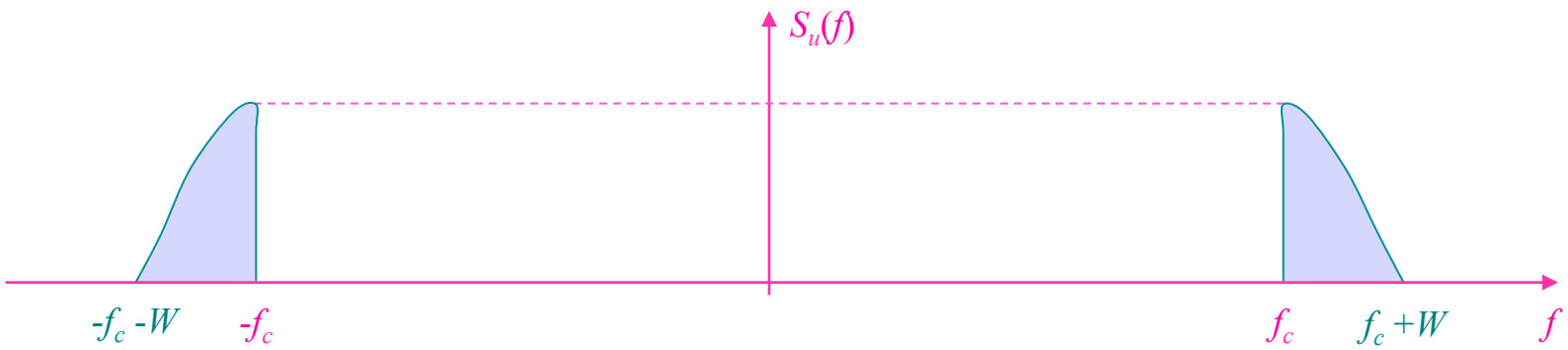
3. Modulação por banda lateral única (SSB):

Virtude: economia de banda de frequência.

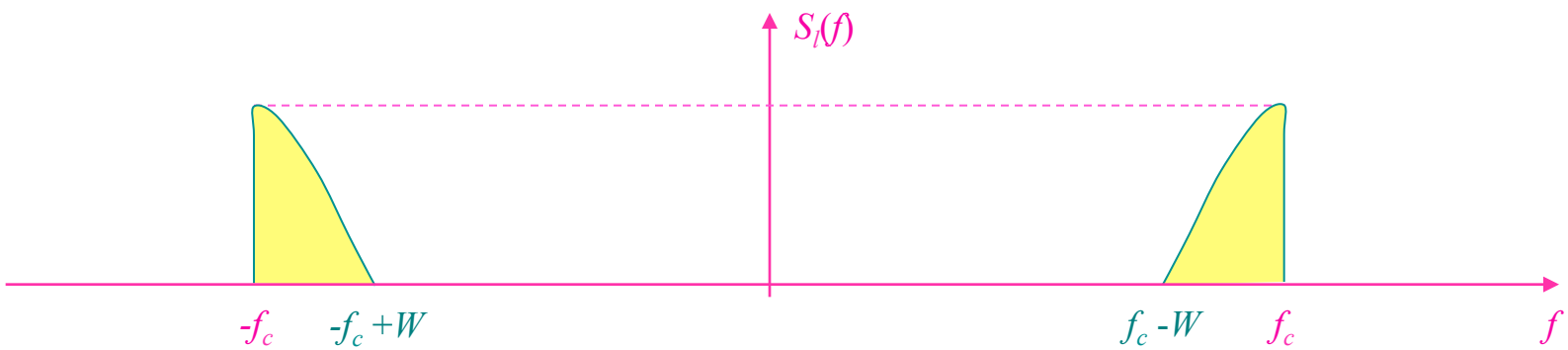




Geração de uma onda modulada SSB:



$$s_u(t) = \frac{A_c}{2}\left[m(t)\cos(2\pi f_c t) - \hat{m}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)\right]$$



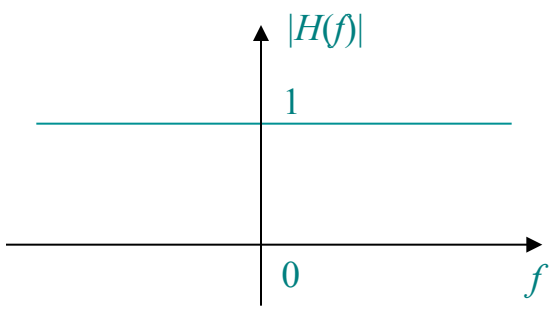
$$s_l(t) = \frac{A_c}{2}\left[m(t)\cos(2\pi f_c t) + \hat{m}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)\right]$$

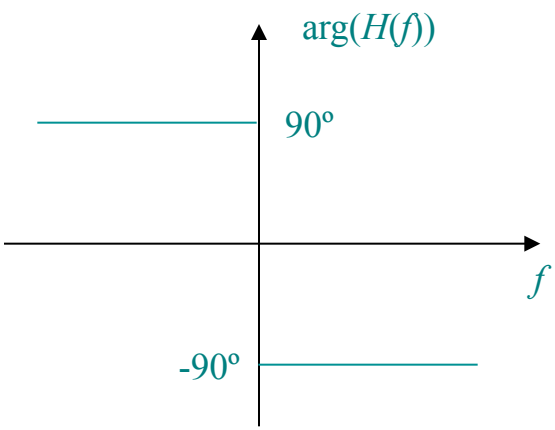
Transformada de Hilbert:

Considere um dispositivo invariante no tempo com função de transferência definida como:

$$H(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f) = \begin{cases} -j & f > 0 \\ 0 & f = 0 \\ j & f < 0 \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{\pi t}$$



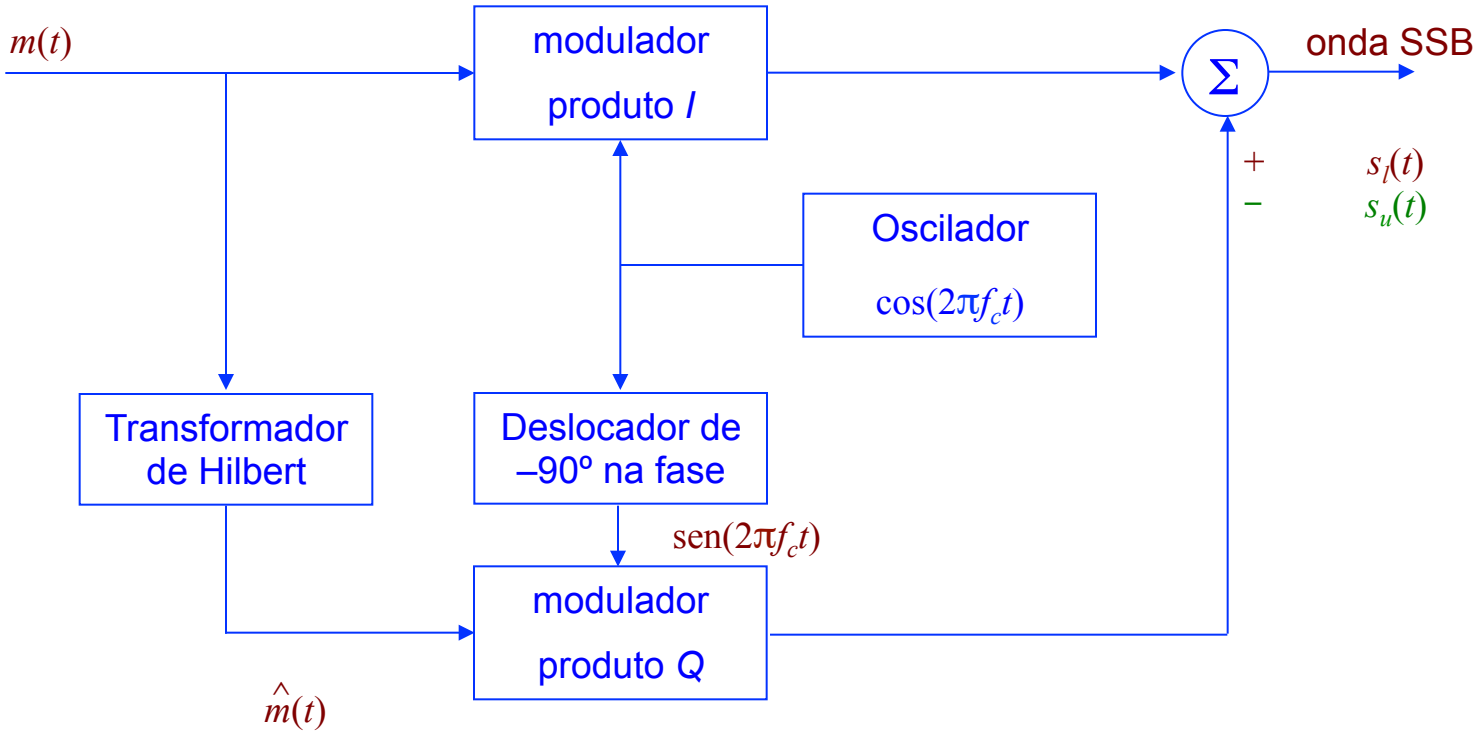


Transformada de Hilbert de $x(t)$:

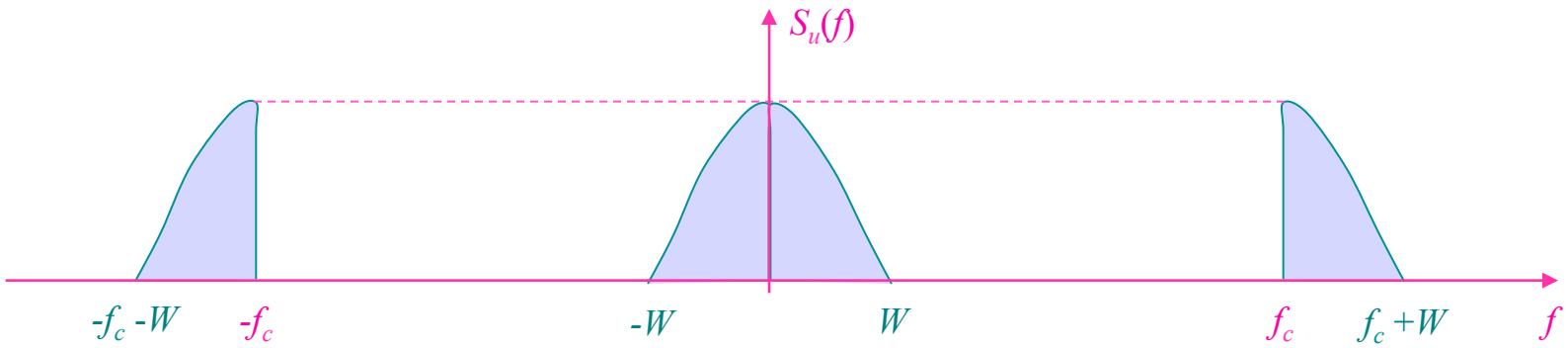
$$\boxed{\hat{x}(t) = x(t) * \left(\frac{1}{\pi t}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\, d\tau}$$

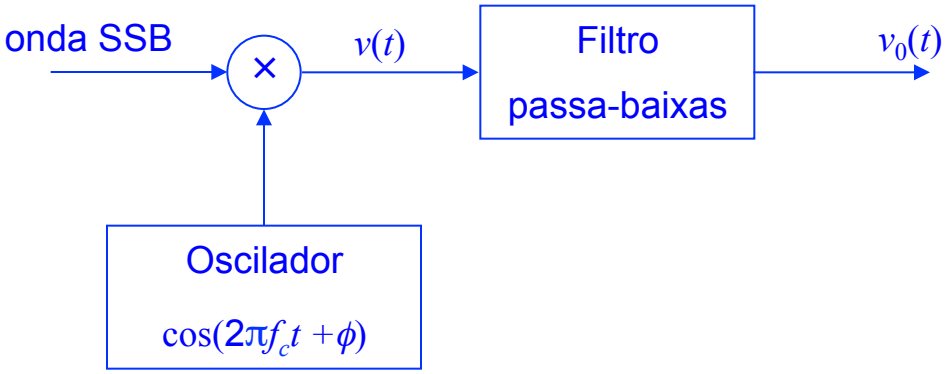
$$\boxed{\hat{X}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f)}$$

Modo de se obter uma onda modulada SSB:



Demodulação de onda SSB:





$$v(t) = \cos(2\pi f_c t)\, s(t)$$

$$= \cos(2\pi f_c t)\frac{A_c}{2}\left[m(t)\cos(2\pi f_c t) \mp \hat{m}(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{A_c}{4}m(t)}_{v_0(t)} + \frac{A_c}{4}\left[m(t)\cos(4\pi f_c t) \pm \hat{m}(t)\,\mathrm{sen}(4\pi f_c t)\right]$$

filtrado

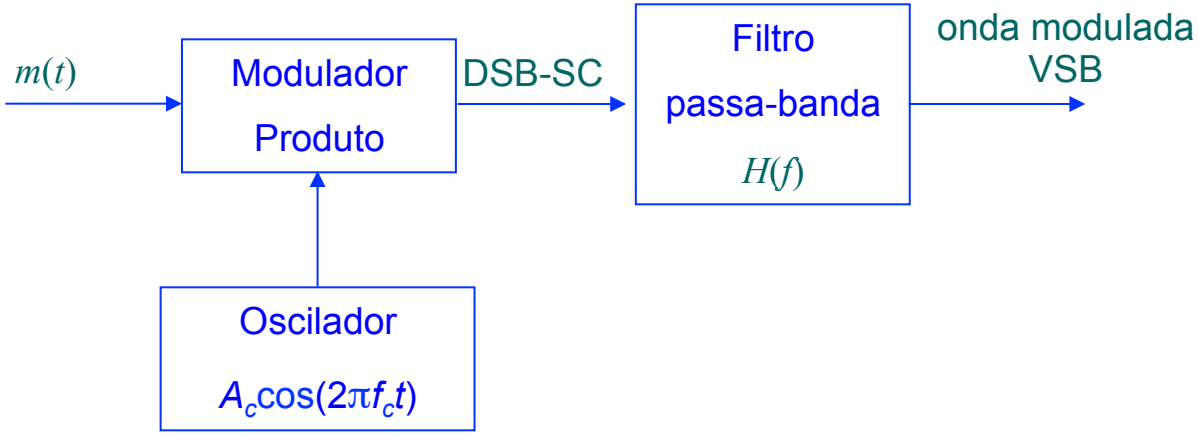
Se o erro ϕ de fase for considerado, temos na saída do demodulador:

$$\boxed{v_0(t) = \frac{A_c}{4}m(t)\cos(\phi) \mp \frac{A_c}{4}\hat{m}(t)\,\mathrm{sen}(\phi)}$$

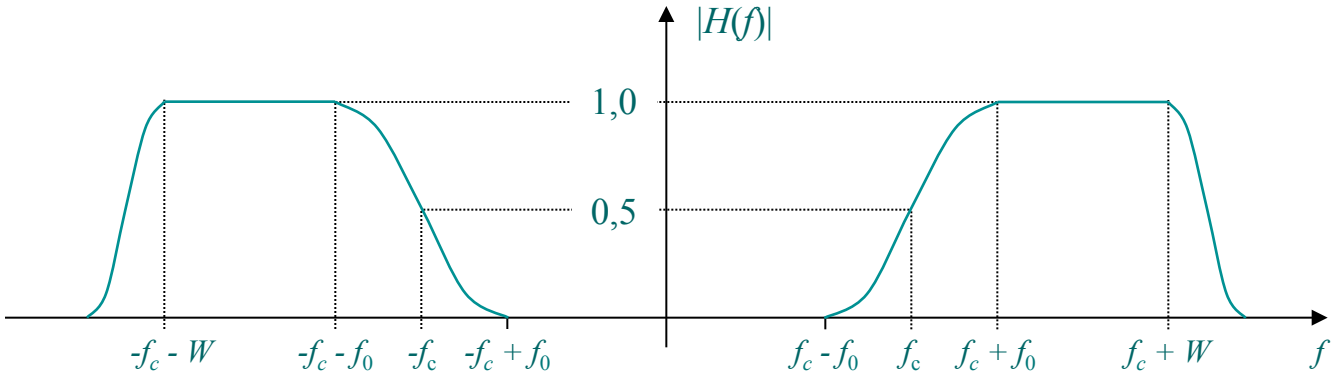
sendo o sinal menos para a modulação SSB de faixa lateral superior.

4. Modulação por Banda Lateral Vestigial (VSB):

Na modulação VSB uma das bandas laterais é parcialmente suprimida e um vestígio da outra é transmitida como compensação para esta supressão.



Assumindo que um vestígio da banda inferior é transmitido.



A porção de corte da resposta em frequência (centrada em f_c) exibe simetria ímpar. Portanto, as seguintes condições são satisfeitas:

1. A soma das magnitudes das frequências tomadas simetricamente em relação a f_c dá 1.

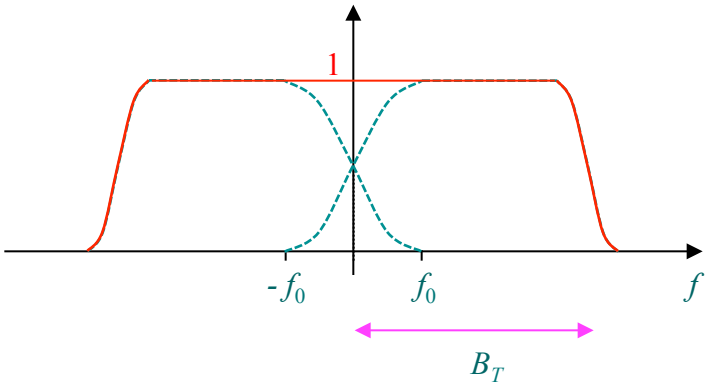
2. A resposta de fase de $H(f)$ é linear. Isto é, $H(f)$ satisfaz a condição:

$$H\left(f - f_c\right) + H\left(f + f_c\right) = 1 \qquad \text{para } -W \le f \le W$$

Largura de faixa de transmissão: $B_T = W + f_v$

W = largura de faixa da mensagem

f_v = largura da banda lateral vestigial



Onda modulada VSB:

$$\boxed{s(t) = \frac{A_c}{2} m(t) \cos(2\pi f_c t) \pm \frac{A_c}{2} m_Q(t) \operatorname{sen}(2\pi f_c t)}$$

onde $m_Q(t)$ é obtida passando $m(t)$ por um filtro cuja resposta em frequência é dada por:

$$H_Q(f) = j\left[H(f - f_c) - H(f + f_c)\right] \qquad \text{para} \quad -W \le f \le W$$

O papel de $m_Q(t)$ é interferir com a componente em fase para que a potência seja parcialmente reduzida em uma das bandas laterais da onda $s(t)$ e se retenha um vestígio da outra banda.

Detecção da envoltória do sinal VSB com portadora:

Na transmissão de TV comercial uma portadora é enviada junta com a onda modulada. Isto facilita a demodulação por envoltória.

Assim,

$$s(t) = A_c\left[1+\frac{1}{2}k_a m(t)\right]\cos(2\pi f_c t) - \frac{1}{2}A_c k_a m_Q(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$

k_a é um fator de escala.

Saída do detector de envoltória:

$$a(t) = A_c\sqrt{\left[1+\frac{1}{2}k_a m(t)\right]^2 + \left[\frac{1}{2}k_a m_Q(t)\right]^2}$$

$$= A_c\left[1+\frac{1}{2}k_a m(t)\right]\sqrt{1+\left[\frac{\frac{1}{2}k_a m_Q(t)}{1+\frac{1}{2}k_a m(t)}\right]^2}$$

Portanto, a distorção é proveniente da componente em quadratura $m_Q(t)$.

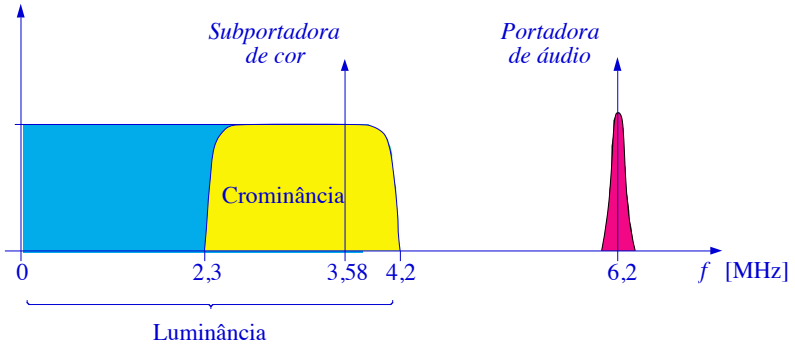
Esta distorção pode ser reduzida fazendo:

1. uma redução da porcentagem de modulação para reduzir o k_a;
2. um aumento da largura da banda lateral vestigial para reduzir $m_Q(t)$.

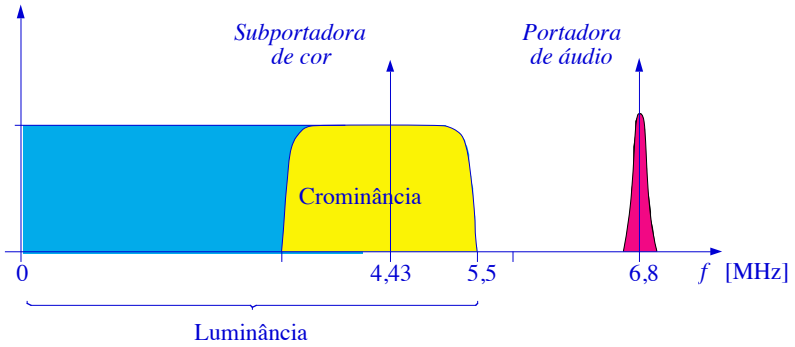
Espectro em banda base de sistemas de TV analógicos terrestres (NTSC, PAL).

Espectros dos padrões de TV:

Sistema NTSC:

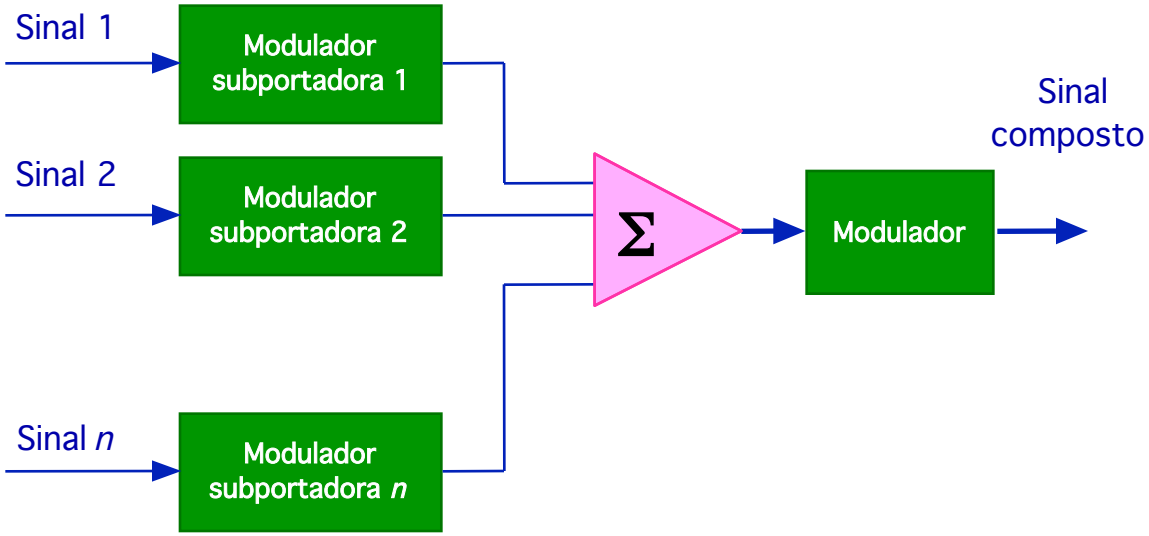


Sistema PAL:



5. Multiplexação por Divisão em frequência (FDM)

Transmissor:



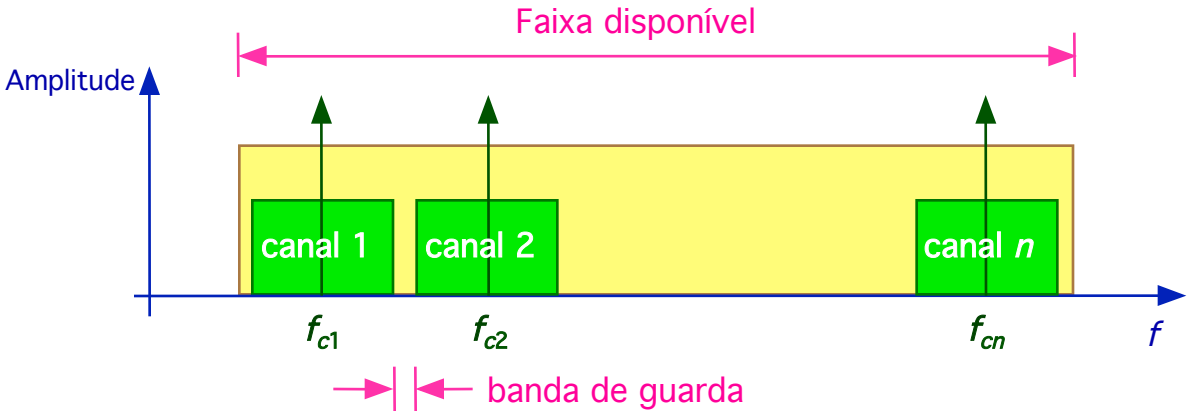
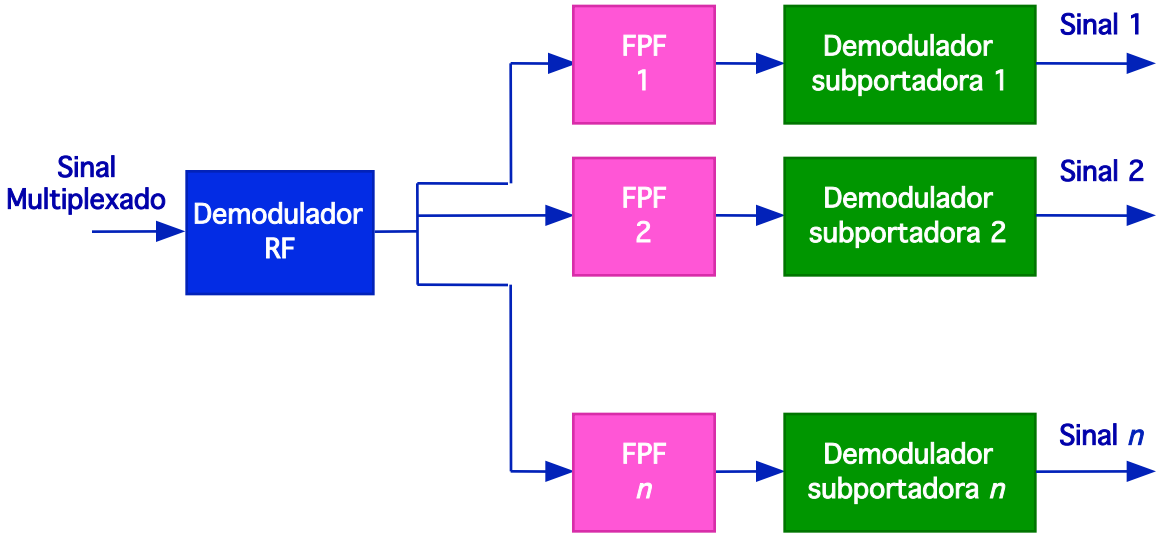
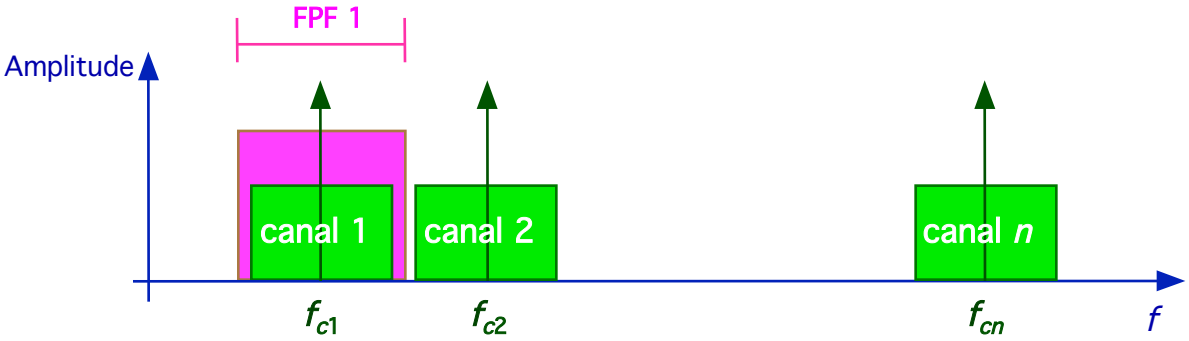
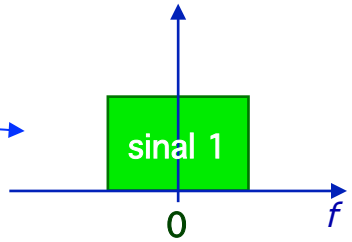


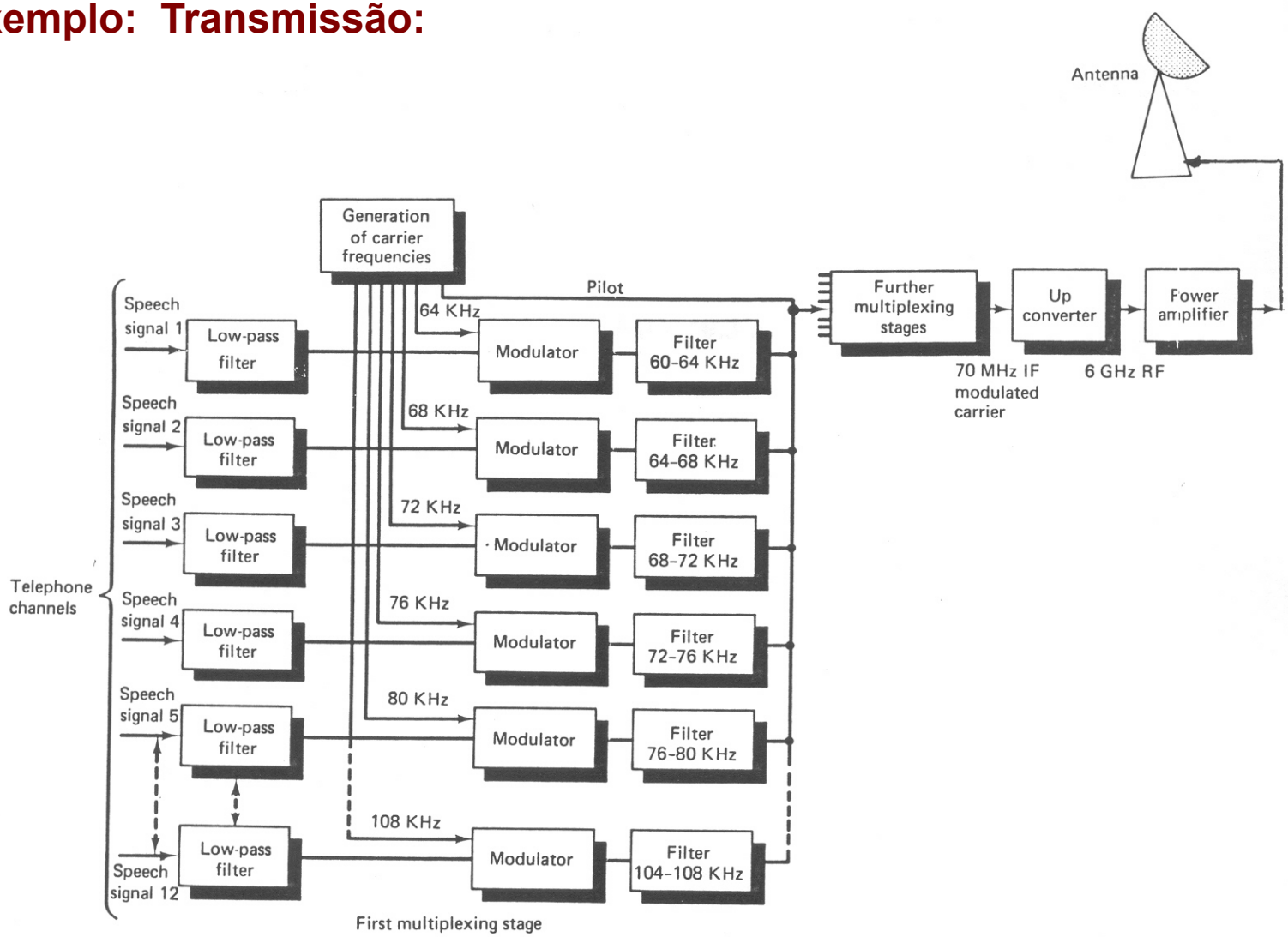
Diagrama de blocos do receptor FDM:



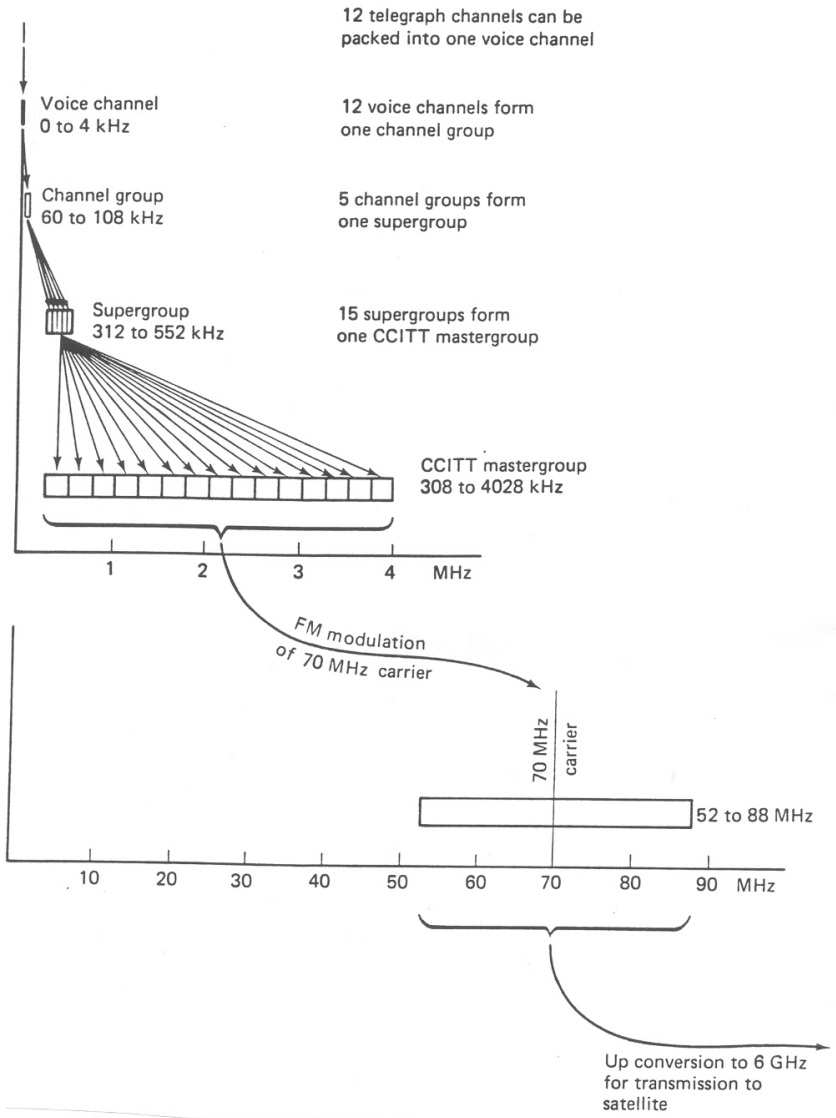




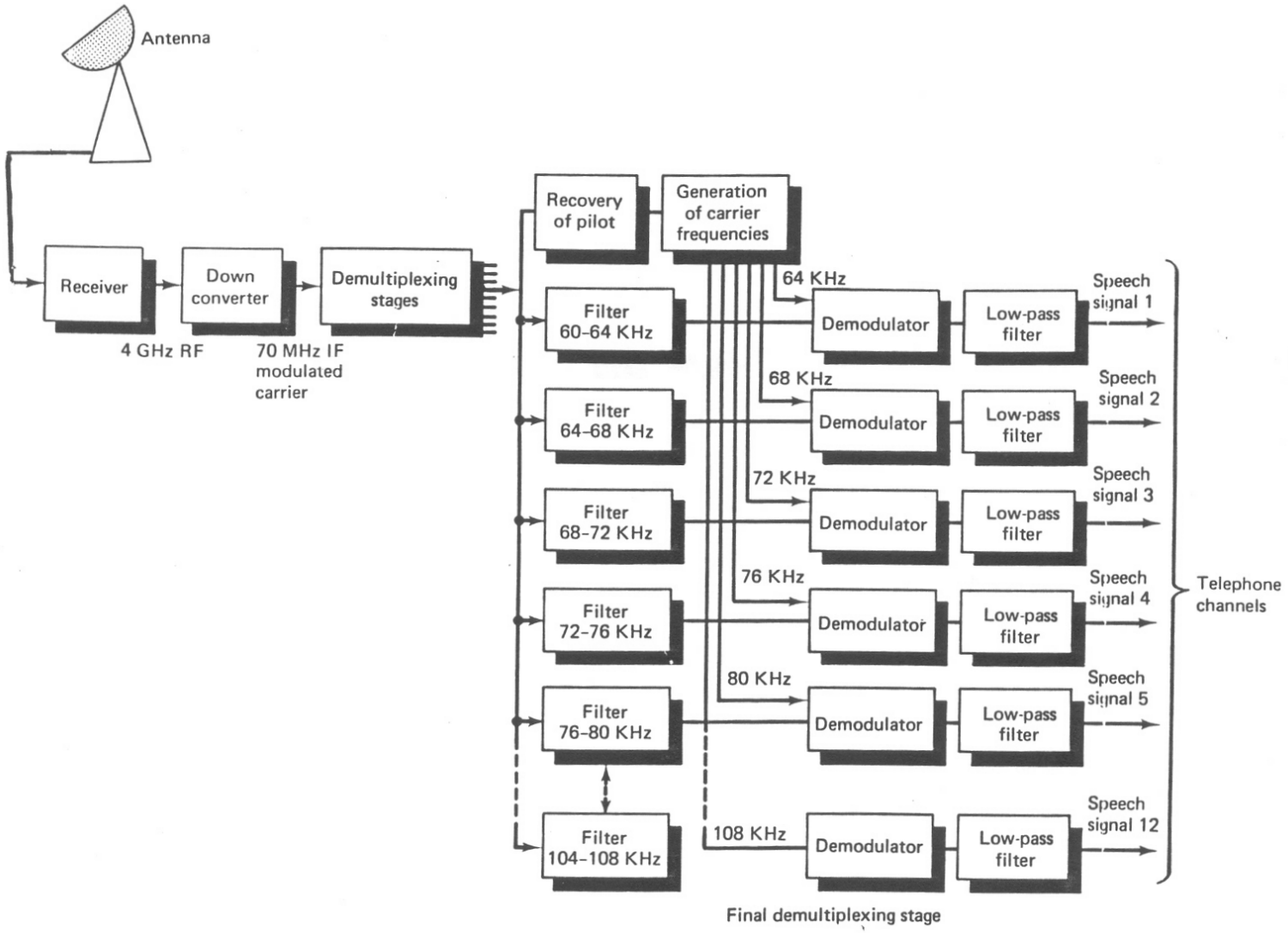
Exemplo: Transmissão:



Estágios executados para transmitir via satélite 900 canais de voz utilizando FDM:

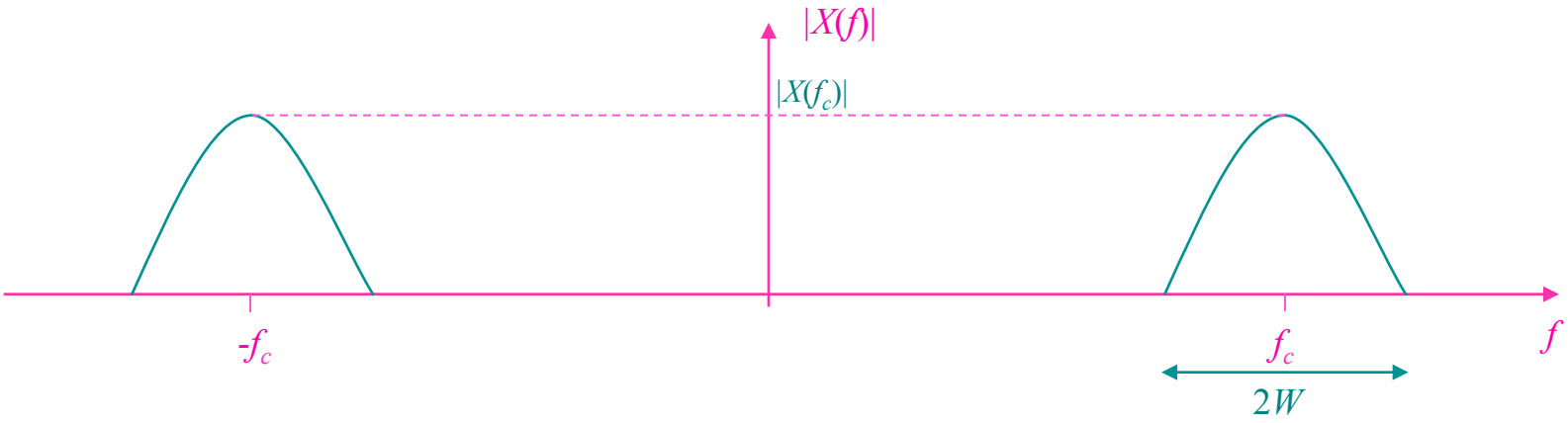


Recepção:


Antenna
Receiver
Down converter
Demultiplexing stages
4 GHz RF
70 MHz IF modulated carrier
Recovery of pilot
Generation of carrier frequencies
Filter 60-64 KHz
Filter 64-68 KHz
Filter 68-72 KHz
Filter 72-76 KHz
Filter 76-80 KHz
Filter 104-108 KHz
64 KHz
68 KHz
72 KHz
76 KHz
80 KHz
108 KHz
Demodulator
Low-pass filter
Speech signal 1
Speech signal 2
Speech signal 3
Speech signal 4
Speech signal 5
Speech signal 12
Telephone channels
Final demultiplexing stage

Representação complexa passa-baixas (em banda básica) de sinais passa-faixas:

Considere um sinal de faixa estreita $x(t)$ com transformada de Fourier $X(f)$.



A pré-envoltória do sinal $x(t)$ é definida como:

$$\boxed{x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)}$$

onde $\hat{x}(t)$ é a transformada de Hilbert de $x(t)$.

A pré-envoltória $x_+(t)$ do sinal $x(t)$ é uma função complexa no tempo com a transformada de Fourier dada por:

$$\boxed{X_+(f) = X(f) + j\hat{X}(f)}$$

onde

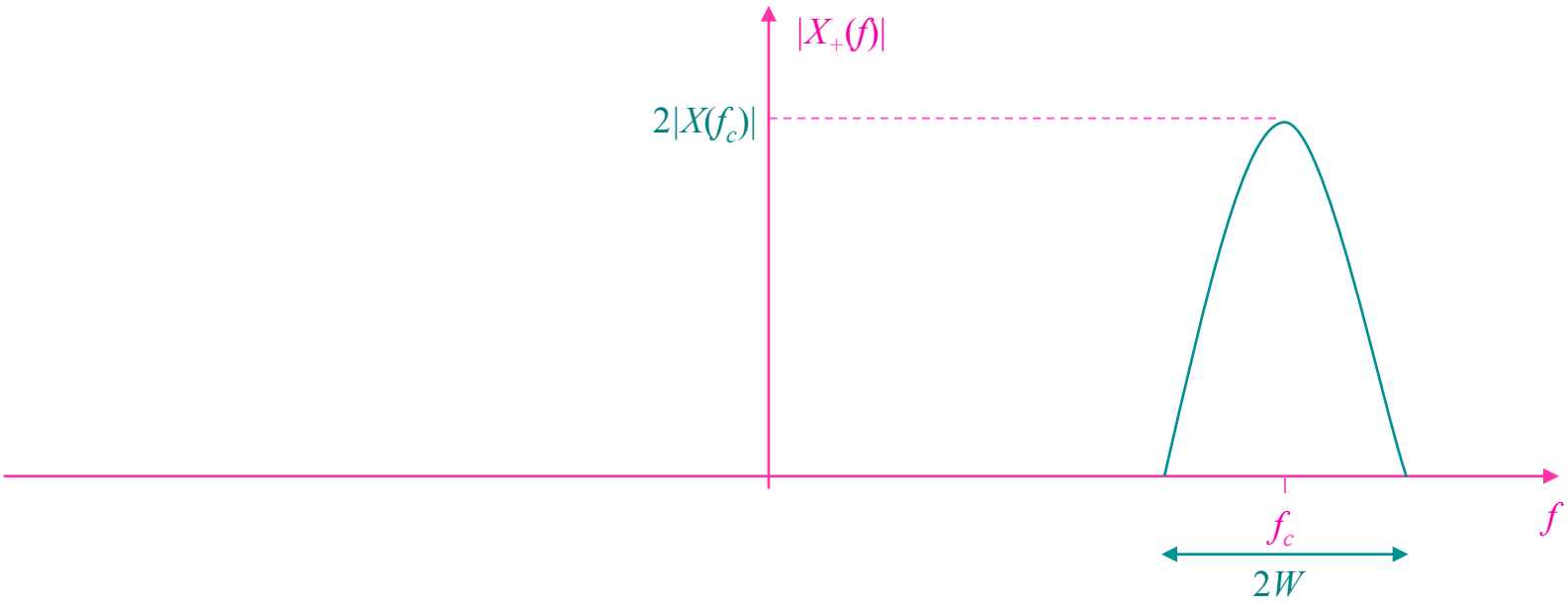
$$\hat{X}(f) = -j\,\mathrm{sgn}(f)\,X(f)$$

Então,

$$\boxed{X_+(f) = X(f) + \mathrm{sgn}(f)\,X(f)}$$

Além disso, usando a definição da função sinal (sgn), temos

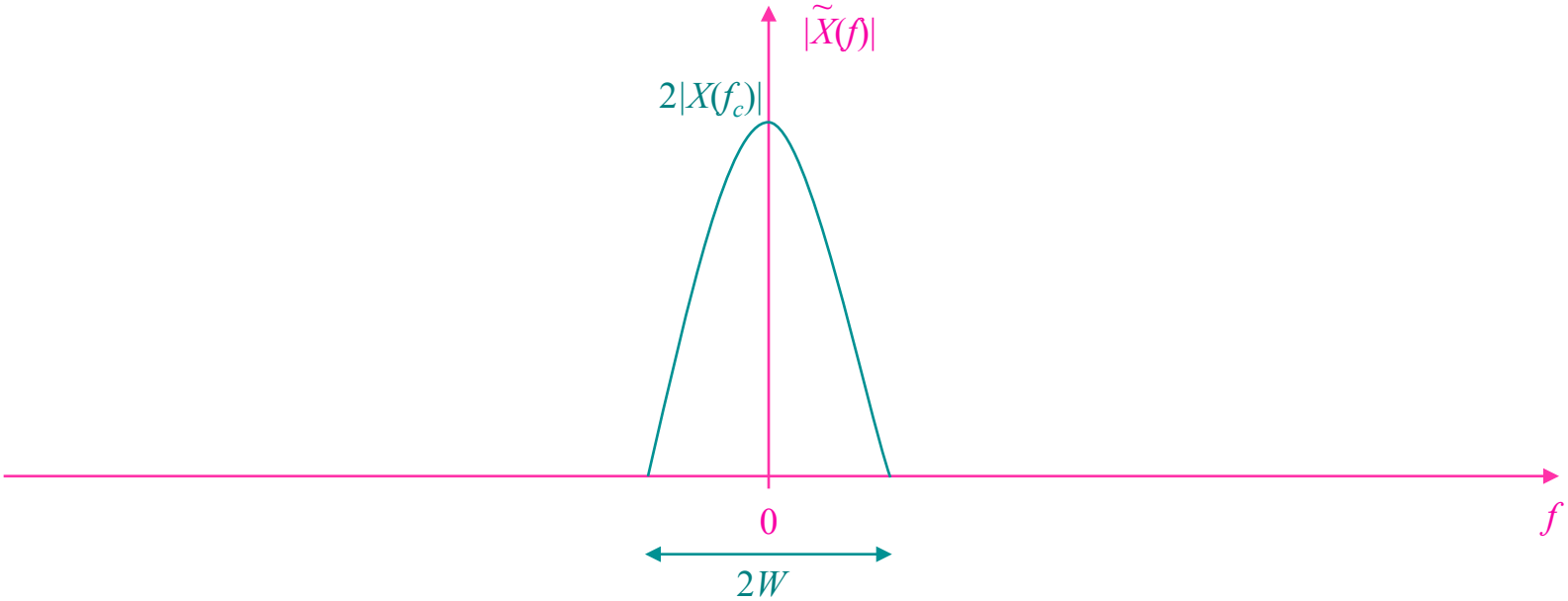
$$X_+(f) = \begin{cases} 2X(f) & f > 0 \\ X(0) & f = 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$$



A propriedade de deslocamento em frequência da transformada de Fourier sugere que a pré-envoltória $x_+(t)$ pode ser expressa na forma:

$$x_+(t) = \tilde{x}(t)\exp(2\pi f_c t)$$

onde $\tilde{x}(t)$ = sinal passa-baixas complexo.



A envoltória complexa $\tilde{x}(t)$ fornece a base para a representação do sinal de faixa estreita $x(t)$. Assim,

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{x}(t)\exp\left(j2\pi f_c t\right)\right\}$$

Usando a identidade de Euler: $\exp(j2\pi f_c t) = \cos(2\pi f_c t) + j\text{sen}(2\pi f_c t)$, obtemos:

$$\boxed{x(t) = x_I(t)\cos(2\pi f_c t) - x_Q(t)\text{sen}(2\pi f_c t)}$$

Esta é a representação canônica de um sinal de faixa estreita em termos das componentes em fase e quadratura da envoltória complexa associada ao sinal.

A envoltória complexa $\tilde{x}(t)$ é definida termos da componente em fase e da componente em quadratura como:

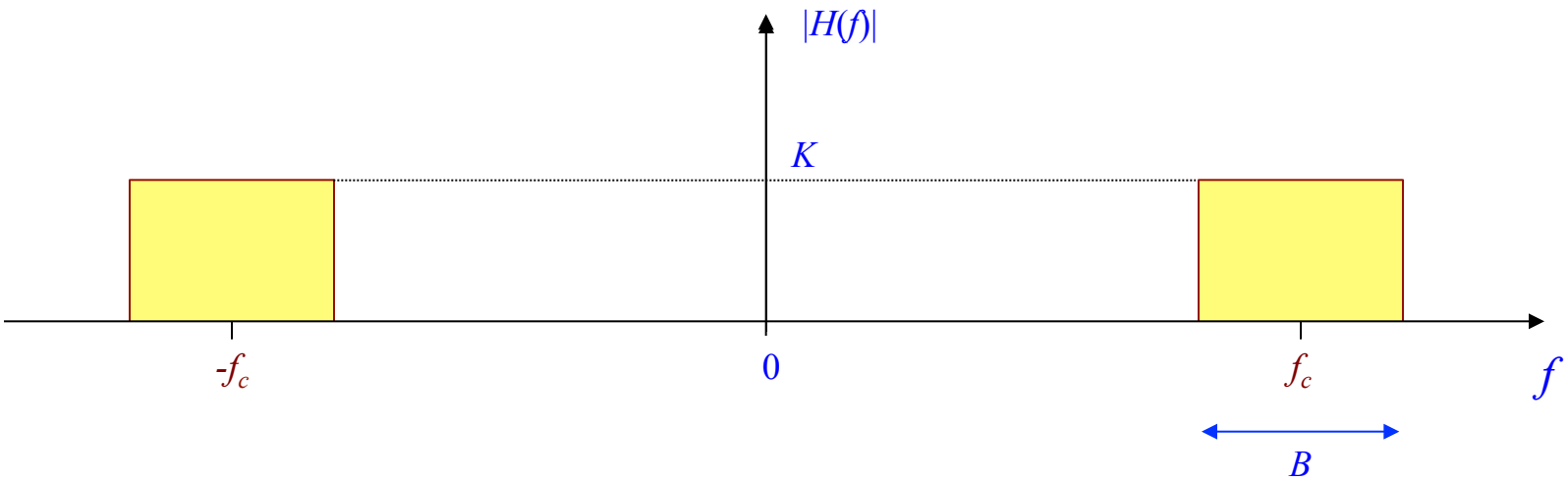
$$\tilde{x}(t) = x_I(t) + jx_Q(t)$$

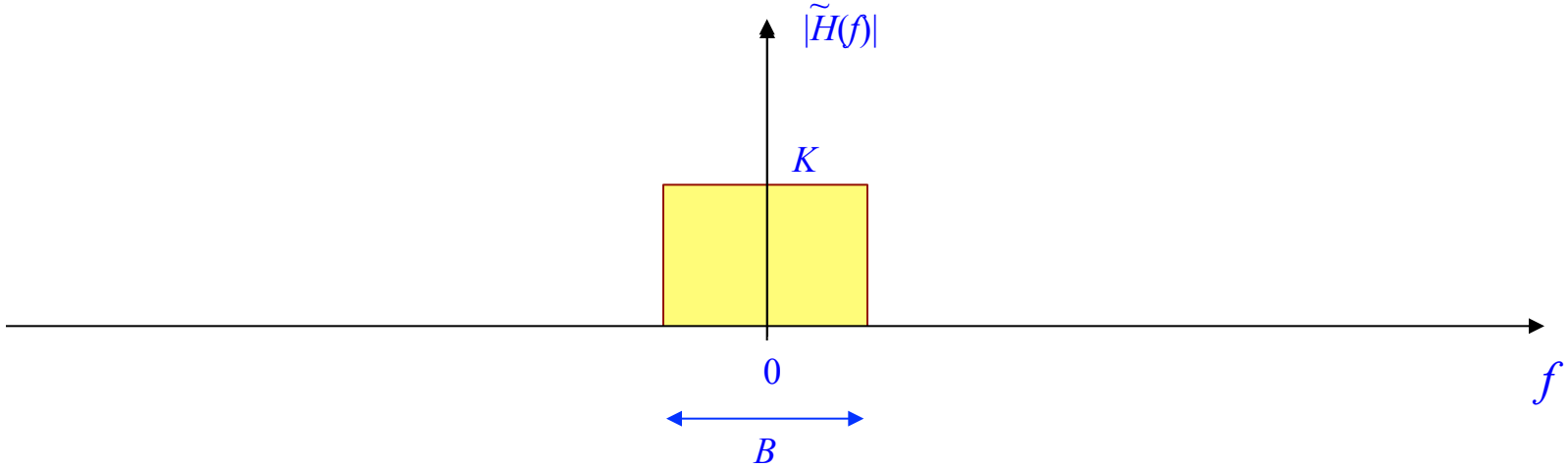
ou seja:

$x_I(t)$ = parte real da envoltória complexa $\tilde{x}(t)$

$x_Q(t)$ = parte imaginária da envoltória complexa $\tilde{x}(t)$

Representação passa-baixas de um sistema de faixa estreita:





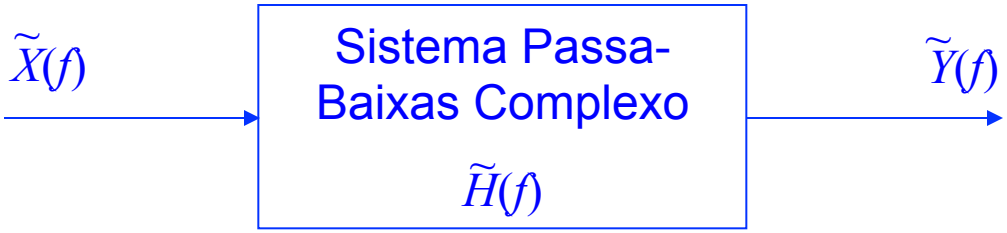
$$Y(f) = H(f)X(f)$$

A transformada de Fourier da saída do sistema passa-baixas complexo é dada por:

$$\boxed{\tilde{Y}(f) = \tilde{H}(f)\tilde{X}(f)}$$

A saída de faixa estreita do sistema é dada por:

$$\boxed{y(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{y}(t)\exp\left(j2\pi f_c t\right)\right\}}$$



$$\tilde{Y}(f) = \tilde{H}(f)\tilde{X}(f)$$

Note que o modelo de transmissão passa-baixas preserva completamente o conteúdo de informação do sinal $x(t)$ de entrada e também do sinal de saída passa-faixa $y(t)$.

6. Modulação angular

Sinal modulado:

$$\boxed{s(t) = A_c \cos\left(\theta_i(t)\right)}$$

onde $\theta_i(t)$ é o ângulo e A_c é a amplitude da portadora modulada.

Se $\theta_i(t)$ variar monotonamente com o tempo, a frequência (Hz) sobre um intervalo de t a $t + \Delta t$ pode ser calculada por:

$$f_{\Delta t}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\theta_i(t+\Delta t) - \theta_i(t)}{\Delta t}$$

Frequência instantânea:

$$f_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} f_{\Delta t}(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\theta_i(t+\Delta t) - \theta_i(t)}{\Delta t} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

Assim, podemos interpretar $s(t)$ como um fasor girante de comprimento A_c e ângulo $\theta(t)$. A velocidade angular deste fasor é $d\theta(t)/dt$.

Para o caso de uma portadora não modulada, temos:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \phi_c$$

O fasor correspondente roda com uma velocidade angular ω_c constante igual a $2\pi f_c$. A constante ϕ_c é o valor de $\theta_i(t)$ para $t = 0$.

Dois métodos de modulação angular:

- modulação em fase,
- modulação em frequência.

Modulação em fase (PM):

O ângulo $\theta_i(t)$ varia linearmente com a mensagem $m(t)$:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$$

onde k_p = sensitividade de fase do modulador.

Por conveniência, $\phi_c = \theta_i(0) = 0$. Então, o sinal modulado é dado por:

$$s(t) = A_c \cos\left(2\pi f_c t + k_p m(t)\right)$$

$$s(t) = A_c \cos\left(\theta_i(t)\right)$$

Modulação em frequência (FM):

A frequência instantânea $f_i(t)$ varia linearmente com a mensagem $m(t)$:

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t)$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

onde k_f = sensitividade em frequência do modulador.

Assim, integrando esta equação no tempo e multiplicando o resultado por 2π, obtemos:

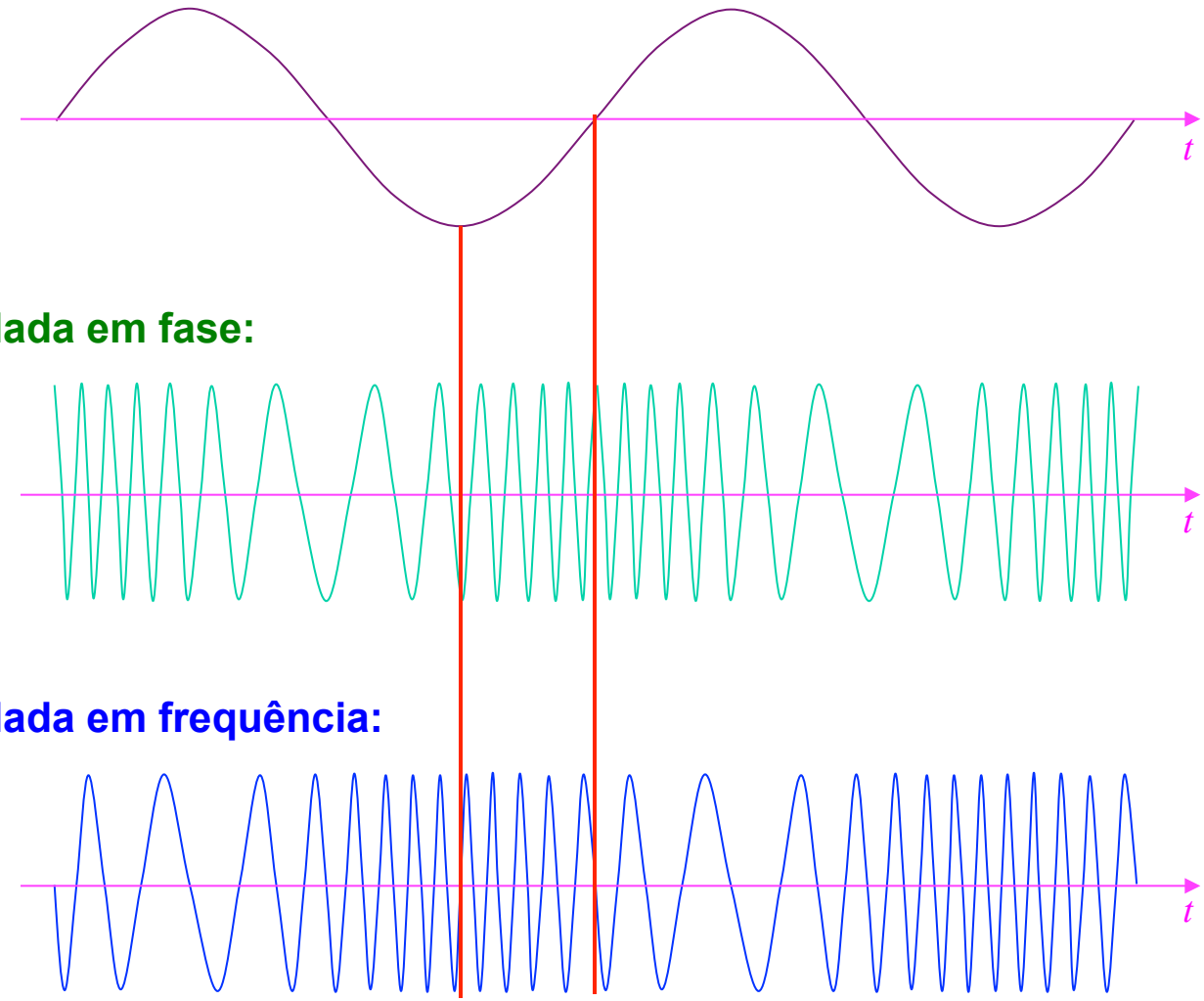
$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\,d\tau$$

Portanto,

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\,d\tau\right]$$

$$s(t) = A_c \cos\left(\theta_i(t)\right)$$

onda moduladora:



onda modulada em fase:

onda modulada em frequência:

Modulação FM por um tom:

sinal mensagem: $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

frequência instantânea: $f_i = f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t)$

Assim,

$$\theta(t) = 2\pi \int_0^t f_i(t)\,dt = 2\pi f_c t + \frac{k_f A_m}{f_m} \operatorname{sen}(2\pi f_m t)$$

Definindo o índice de modulação como $\beta = \Delta f / f_m = k_f A_m / f_m$, temos:

$$\theta(t) = 2\pi f_c t + \beta \operatorname{sen}(2\pi f_m t)$$

$\Delta f = k_f A_m$ é denominado desvio de frequência

Análise espectral da onda FM modulada por um tom:

Onda FM: $s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \text{sen}(2\pi f_m t)]$

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)\cos[\beta \,\text{sen}(2\pi f_m t)] - A_c \,\text{sen}(2\pi f_c t)\,\text{sen}[\beta \,\text{sen}(2\pi f_m t)]$$

Componentes em fase e em quadratura:

$$s_I(t) = A_c \cos[\beta \,\text{sen}(2\pi f_m t)]$$

$$s_Q(t) = A_c \,\text{sen}[\beta \,\text{sen}(2\pi f_m t)]$$

Assim,

$$\tilde{s}(t) = s_I(t) + j s_Q(t)$$

$$= A_c \exp[j\beta \,\text{sen}(2\pi f_m t)]$$

A envoltória complexa $\tilde{s}(t)$ retém a informação completa sobre o processo de modulação.

A onda FM pode então pode ser expressa por:

$$s(t) = \mathrm{Re}\left\{A_c \exp\left[j2\pi f_c t + j\beta \,\mathrm{sen}\left(2\pi f_m t\right)\right]\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\tilde{s}(t)\exp\left(j2\pi f_c t\right)\right\}$$

A envoltória complexa é uma função periódica no tempo, com frequência fundamental igual a f_m. Portanto, pode-se expandir $\tilde{s}(t)$ em série de Fourier complexa:

$$\tilde{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(j2\pi n f_m t\right)$$

$$\tilde{s}(t) = A_c \exp\left[j\beta \,\mathrm{sen}\left(2\pi f_m t\right)\right]$$

onde c_n é dado por:

$$c_n = f_m \int_{-1/2 f_m}^{1/2 f_m} \tilde{s}(t)\exp\left(-j2\pi n f_m t\right)dt$$

$$= f_m A_c \int_{-1/2 f_m}^{1/2 f_m} \exp\left[j\beta \,\mathrm{sen}\left(2\pi f_m t\right)\right]\exp\left(-j2\pi n f_m t\right)dt$$

$$= f_m A_c \int_{-1/2 f_m}^{1/2 f_m} \exp\left[j\beta \,\mathrm{sen}\left(2\pi f_m t\right) - j2\pi n f_m t\right]dt$$

Função de Bessel de n-ésima ordem e primeira espécie:

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[j\left(\beta \operatorname{sen}(x) - nx\right)\right]dx$$

Considerando $x = 2\pi f_m t$, temos:

$$c_n = A_c J_n(\beta)$$

Assim,

$$\tilde{s}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\exp\left(j2\pi n f_m t\right)$$

Substituindo em $s(t) = \operatorname{Re}\left\{\tilde{s}(t)\exp\left(j2\pi f_c t\right)\right\}$, obtemos

$$s(t) = A_c \operatorname{Re}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\exp\left[j2\pi\left(f_c + n f_m\right)t\right]\right\}$$

Intercambiando a ordem da somatória e calculando a parte real da equação anterior, resulta:

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos\left[2\pi\left(f_c + nf_m\right)t\right]$$

E o espectro é dado, portanto, por

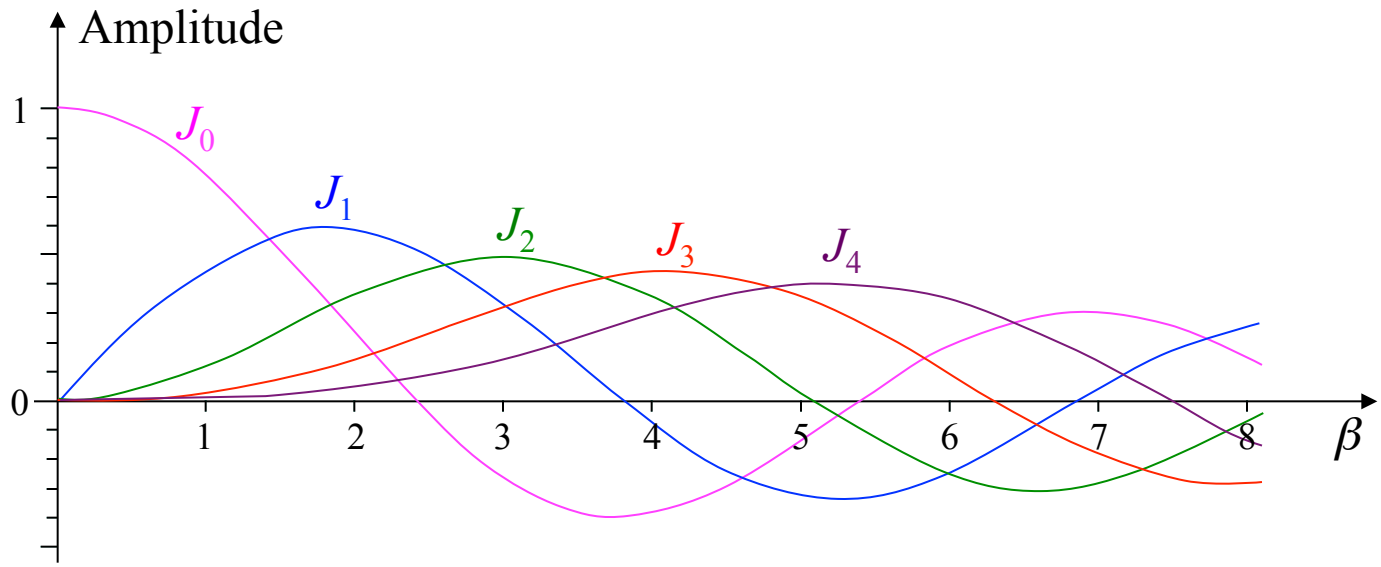
$$\boxed{S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\left[\delta\left(f - f_c - nf_m\right) + \delta\left(f + f_c + nf_m\right)\right]}$$

Note que para β fixo, temos que a função de Bessel obedece a seguinte relação:

$$J_{-n}(\beta) = \begin{cases} J_n(\beta) & \text{para } n \text{ par} \\ -J_n(\beta) & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Note também que, para um valor fixo de n, $|J_n(\beta)| \to 0$ com o aumento de β.

Função de Bessel:

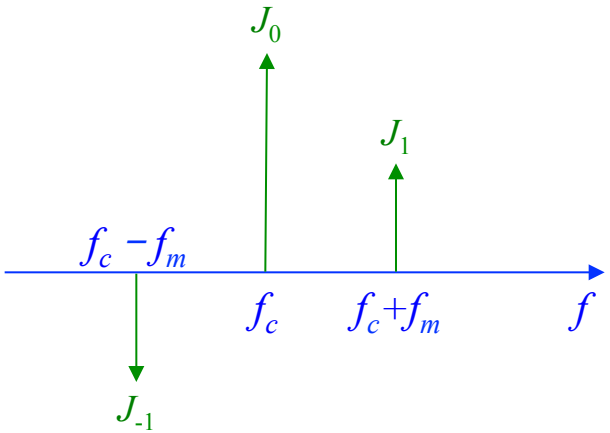


Propriedade 1: Para valores pequenos de β << 1 rad, a onda FM assume a forma de faixa estreita, consistindo da portadora e de duas componentes laterais.

$$J_0(\beta) \approx 1$$

$$J_1(\beta) \approx \beta/2$$

$$J_n(\beta) \approx 0 \quad \text{para } n > 1$$

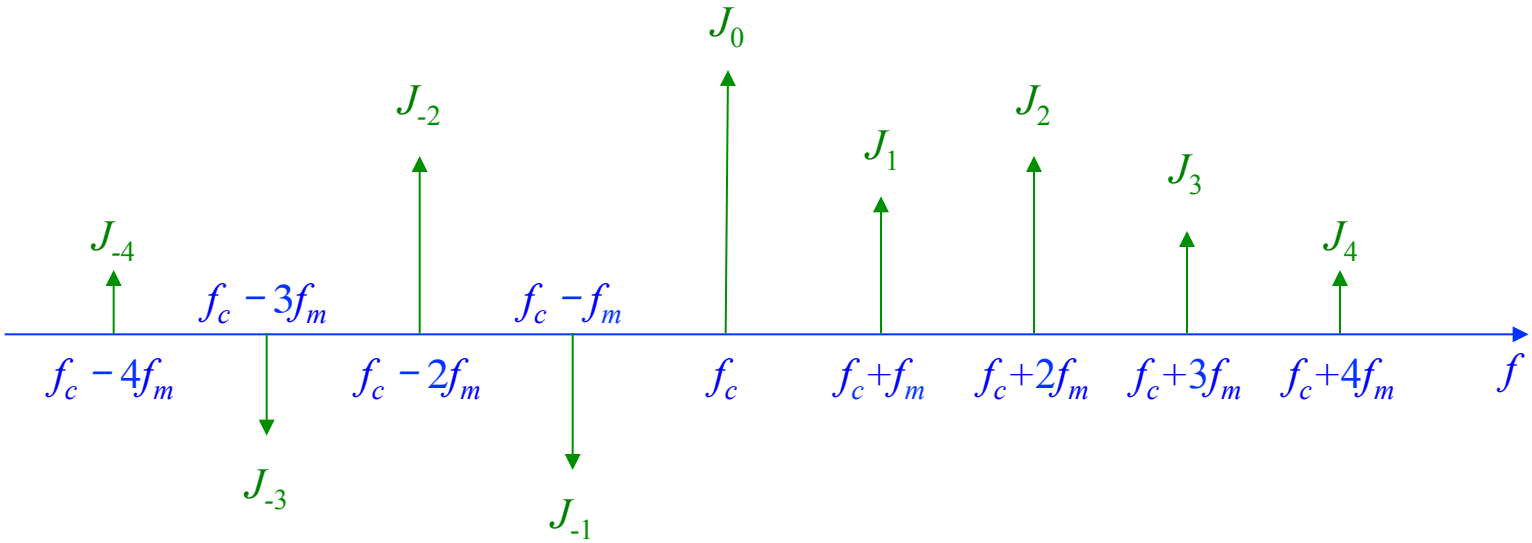


Válido para $\beta \leq$ 0,3 rad. Assim,

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{\beta A_c}{2} \cos\left[j2\pi(f_c + f_m)t\right] - \frac{\beta A_c}{2} \cos\left[j2\pi(f_c - f_m)t\right]$$

Similar a uma modulação AM.

Propriedade 2: Para valores grandes de $\beta > 1$ rad, a onda FM possui uma portadora e um número infinito de componentes laterais simétricas.



Propriedade 3: A envoltória de uma onda FM é constante, então sua potência dissipada em um resistor de 1 Ω também é constante.

Largura de faixa de ondas FM:

Teoria: largura de faixa infinita.

Prática: apenas as componentes significativas de frequências laterais.

Regra de Carson:

$$B \approx 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

onde B = largura de faixa do sinal modulado

$\Delta f = k_f A_m$ = desvio de frequência

Largura de faixa FM mais precisa:

Largura de faixa de 99% de uma onda FM é a separação entre duas frequências além das quais nenhuma das frequências laterais é maior que 1% da amplitude de portadora obtida quando a modulação é removida.

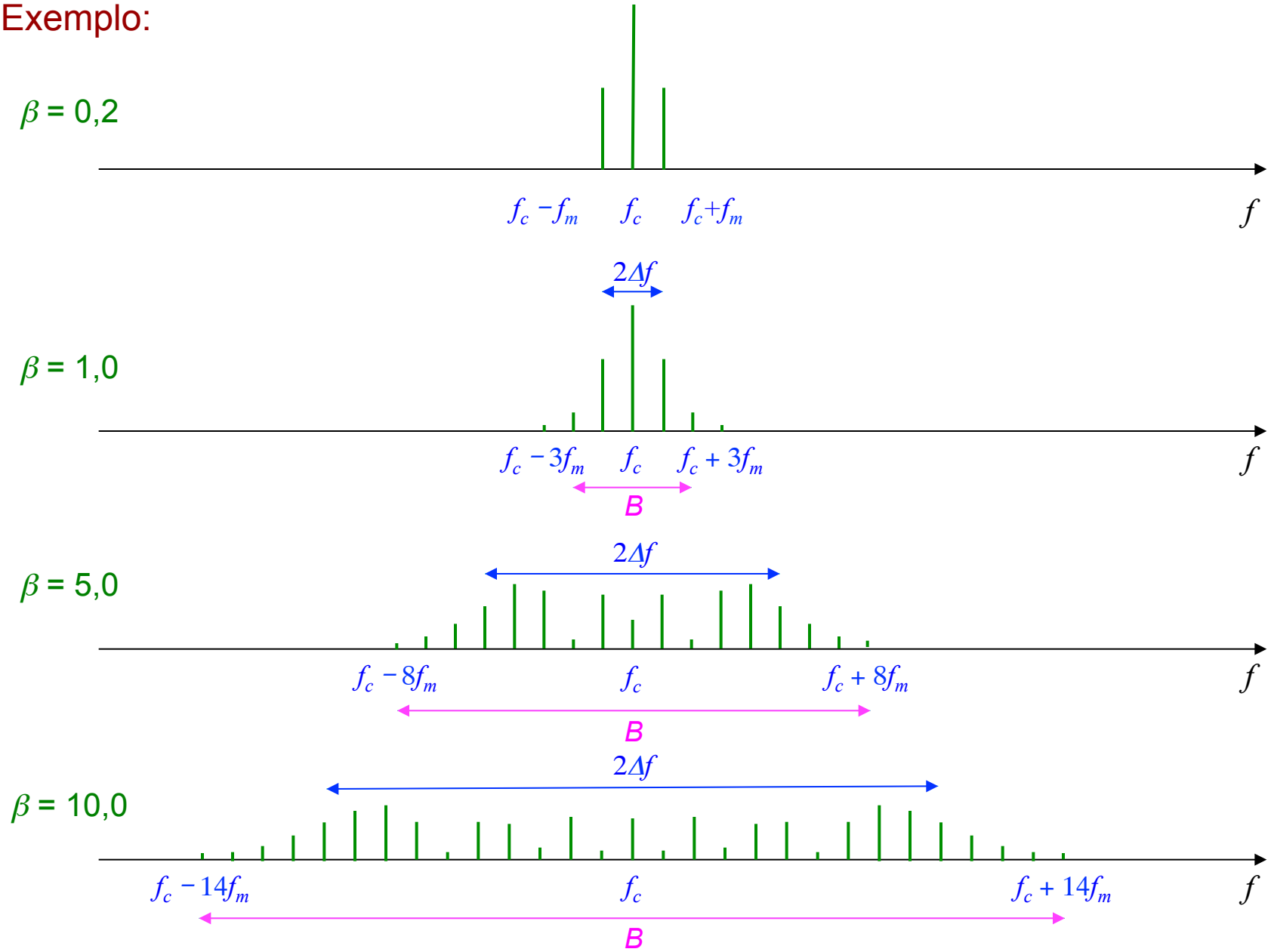
Assim, a largura de faixa de transmissão é igual a $2n_{max}f_m$, onde f_m é a frequência da moduladora e n_{max} é o máximo valor inteiro que satisfaz a condição:

$$\left|J_n\left(\beta\right)\right| > 0{,}01$$

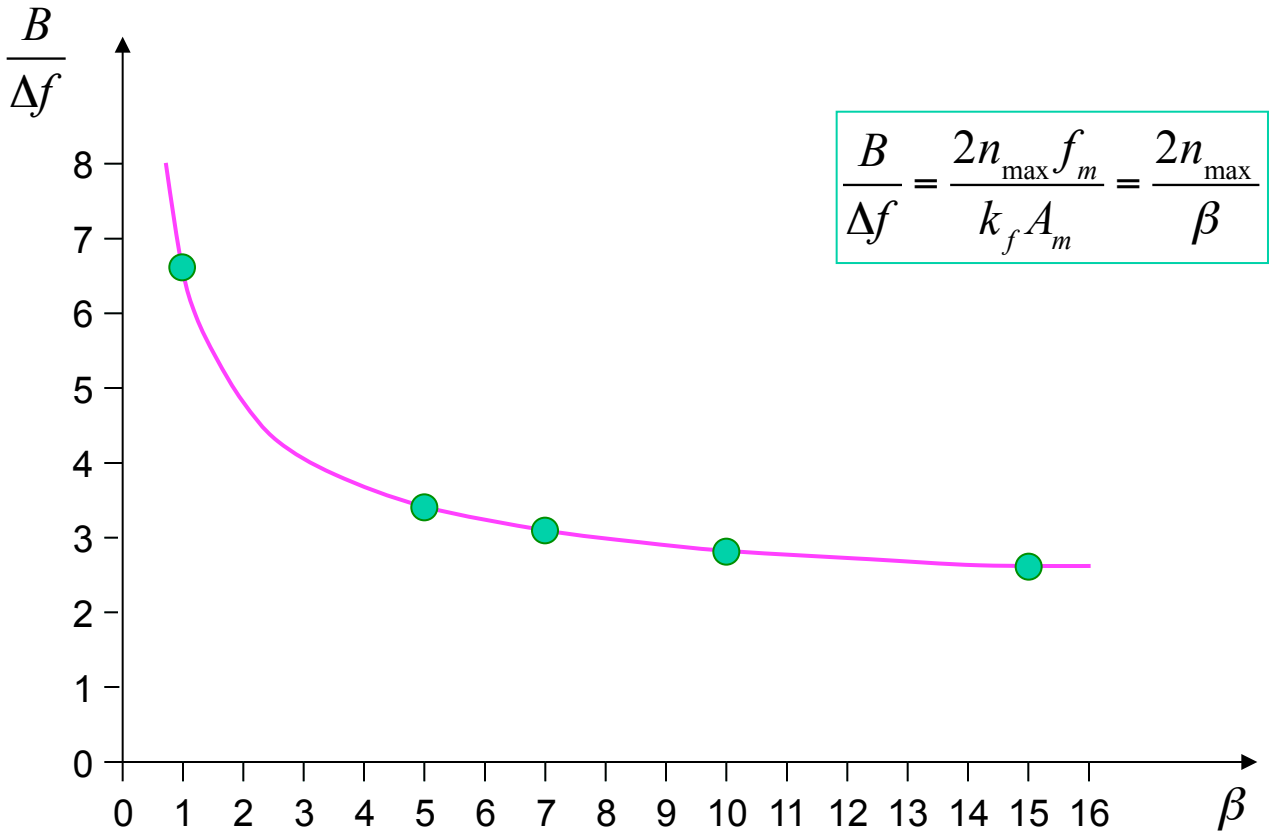
Número total de frequências laterais significativas para diferentes valores de β:

Índice de Modulação β	Nº de frequências laterais significativas $2n_{max}$
0,1	2
0,3	4
0,5	4
1,0	6
2,0	8
5,0	16
10,0	28
20,0	50
30,0	70

Exemplo:


β = 0,2
$f_c - f_m$
f_c
$f_c + f_m$
f
$2\Delta f$
β = 1,0
$f_c - 3f_m$
f_c
$f_c + 3f_m$
f
B
$2\Delta f$
β = 5,0
$f_c - 8f_m$
f_c
$f_c + 8f_m$
f
B
$2\Delta f$
β = 10,0
$f_c - 14f_m$
f_c
$f_c + 14f_m$
f
B

Curva normalizada da largura de faixa em função de β:



$$\frac{B}{\Delta f} = \frac{2n_{\max} f_m}{k_f A_m} = \frac{2n_{\max}}{\beta}$$

$\Delta f = k_f A_m$ = desvio de frequência

Se a mensagem não for um tom, mas um sinal com máxima frequência W, a largura de faixa é estimada utilizando a situação de pior caso.

$D = \Delta f/W$: razão de desvio, definida como uma razão do desvio de frequência Δf, que corresponde a amplitude máxima possível da onda moduladora $m(t)$, com a maior frequência de modulação W.

β é então trocado por D.

Exemplo: Rádios FM comerciais possuem desvio de frequência fixo = 75 kHz.

Se tomarmos $W = 15$ kHz como sendo a máxima frequência de áudio de interesse, temos:

$$D = \Delta f / W = 75/15 = 5$$

Usando a regra de Carson:

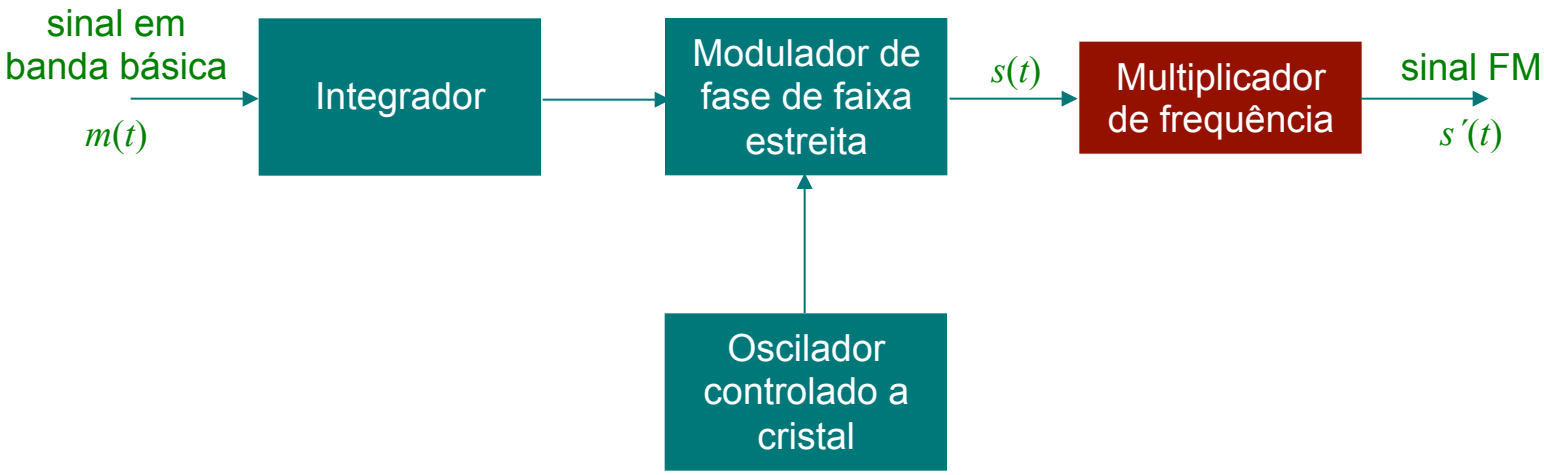
$$B = 2(\Delta f + W) = 2(75 + 15) = 180 \text{ kHz}$$

Se usarmos a curva anterior, temos:

$$B = 3{,}3\Delta f = 247 \text{ kHz}$$

Geração de ondas FM:

a) Forma indireta



$m(t)$ é integrada e, em seguida, modulada em fase utilizando um oscilador controlado a cristal (maior estabilidade de frequência).

β é mantido pequeno de modo a minimizar a distorção $\Rightarrow$ FM de faixa estreita.

O FM de faixa estreita é multiplicado em frequência para produzir o sinal FM de faixa larga.

Relação entre a entrada e a saída do dispositivo não linear do multiplicador:

$$v(t) = a_1 s(t) + a_2 s^2(t) + \cdots + a_n s^n(t)$$

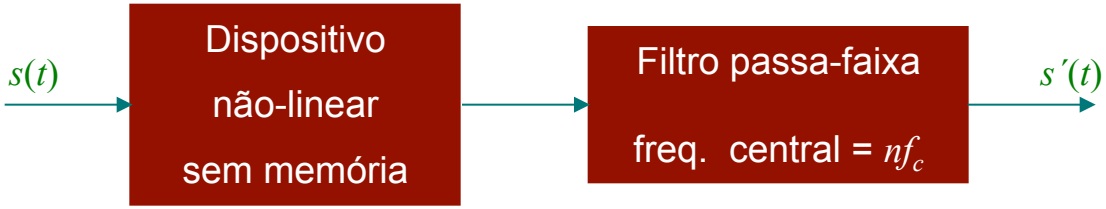
onde n = maior ordem de não linearidade,

a_i = coeficientes determinados pelo ponto de operação do dispositivo.

Sinal FM que entra no multiplicador:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\, d\tau\right]$$

Sua frequência instantânea é dada por: $f_i(t) = f_c + k_f m(t)$



Largura de faixa do filtro passa-faixa = n vezes a largura do sinal FM de entrada do multiplicador.

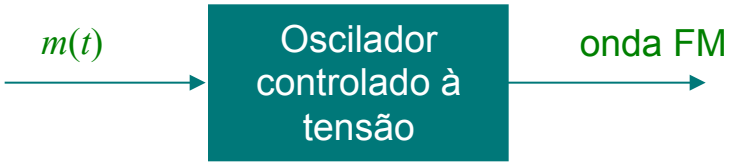
Saída do filtro passa-faixa:

$$\boxed{s'(t) = A_c' \cos\left[2\pi n f_c t + 2\pi n k_f \int_0^t m(\tau)\, d\tau\right]}$$

cuja frequência instantânea é dada por: $f_i'(t) = nf_c + nk_f m(t)$

b) Forma direta

Na forma direta a frequência instantânea da portadora é variada diretamente através de um dispositivo conhecido como oscilador controlado à tensão (VCO).



Demodulação de sinais FM

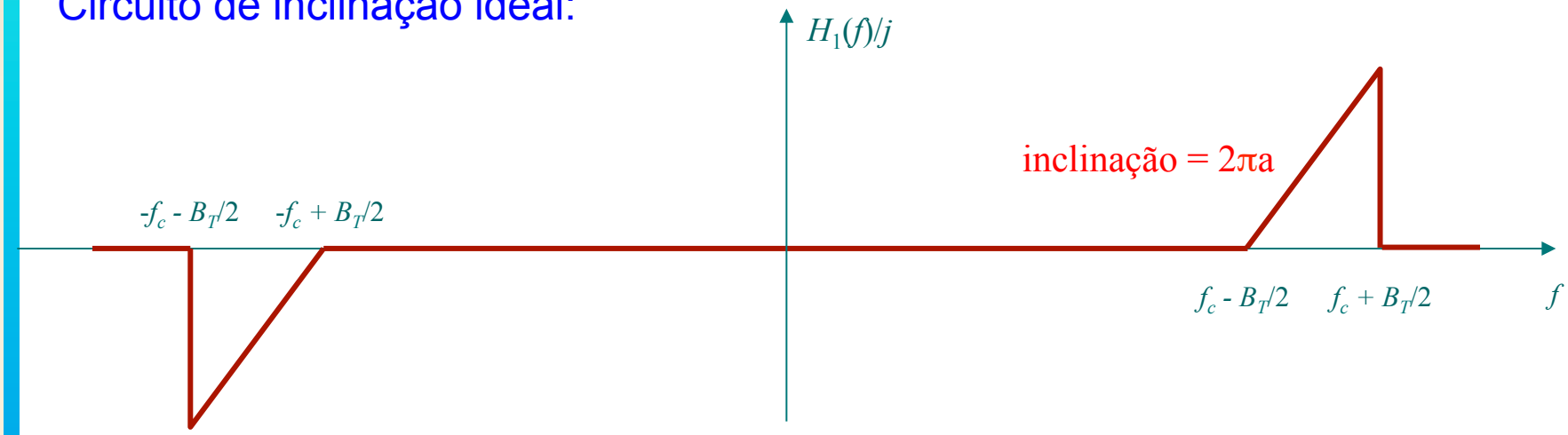
Dois tipos de detectores:

- discriminador de frequência,
- de cruzamento de zeros.

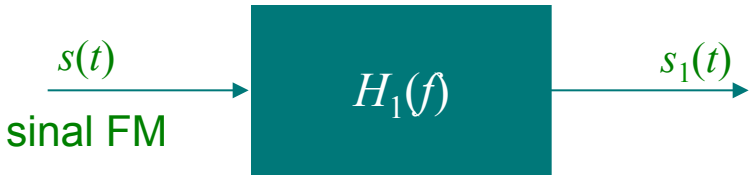
a) Discriminador de frequência

Composto de um circuito de inclinação seguido de um detector de envoltória.

Circuito de inclinação ideal:



$$H_1(f) = \begin{cases} j2\pi a\left(f - f_c + \dfrac{B_T}{2}\right) & f_c - \dfrac{B_T}{2} \le f \le f_c + \dfrac{B_T}{2} \\ j2\pi a\left(f + f_c - \dfrac{B_T}{2}\right) & -f_c - \dfrac{B_T}{2} \le f \le -f_c + \dfrac{B_T}{2} \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

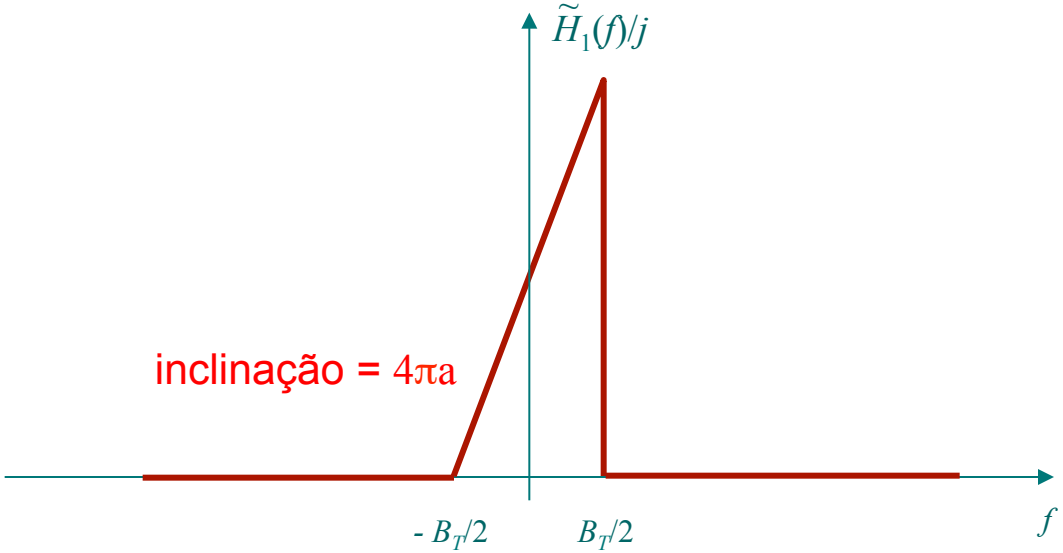


$s(t)$ com frequência de portadora f_c e banda de frequência B_T.

Seja $\widetilde{H}_1(f)$ dada por:

$$\tilde{H}_1\left(f - f_c\right) = 2H_1\left(f\right), \qquad f > 0$$

$$\tilde{H}_1\left(f\right) = \begin{cases} j4\pi a\left(f + \dfrac{B_T}{2}\right) & -\dfrac{B_T}{2} \le f \le \dfrac{B_T}{2} \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$



Sinal FM:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\, d\tau\right]$$

Envoltória complexa do sinal FM:

$$\tilde{s}(t) = A_c \exp\left[j2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\, d\tau\right]$$

Então, definindo $\tilde{s}_1(t) \leftrightarrow \tilde{S}_1(f)$ como a envoltória complexa da resposta do circuito de inclinação anterior à entrada $\tilde{s}(t)$, temos:

$$\tilde{S}_1(f) = \frac{1}{2}\tilde{H}_1(f)\tilde{S}(f) = \begin{cases} j2\pi a\left(f + \dfrac{B_T}{2}\right)\tilde{S}(f) & -\dfrac{B_T}{2} \le f \le \dfrac{B_T}{2} \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

Fazendo a transformada inversa da expressão anterior, obtemos:

$$\tilde{s}_1(t) = a\left[\frac{d\tilde{s}(t)}{dt} + j\pi B_T \tilde{s}(t)\right]$$

$$\tilde{s}(t) = A_c \exp\left[j2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\,d\tau\right]$$

Assim,

$$\tilde{s}_1(t) = j\pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t)\right] \exp\left[j2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\,d\tau\right]$$

A resposta desejada do circuito de inclinação é dada por:

$$s_1(t) = \mathrm{Re}\left\{\tilde{s}_1(t)\exp\left(j2\pi f_c t\right)\right\} = \underbrace{\pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t)\right]}_{\text{modulação em amplitude}} \underbrace{\cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\,d\tau + \frac{\pi}{2}\right]}_{\text{modulação FM}}$$

Note que se escolhermos:

$$\left|\frac{2k_f}{B_T}m(t)\right| < 1 \qquad \text{para todo } t$$

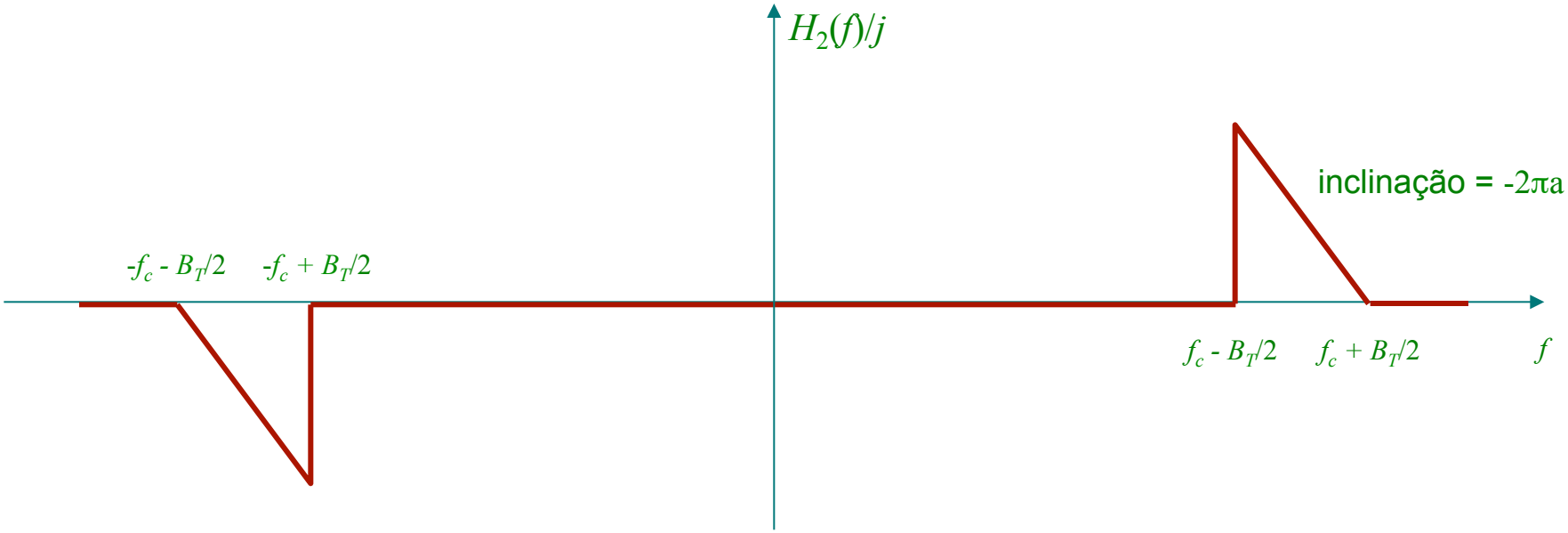
então podemos usar o detector de envoltória para recuperar o sinal mensagem original, a menos de uma polarização. Saída do detector de envoltória:

$$\boxed{\left|\tilde{s}_1(t)\right| = \pi B_T a A_c\left[1+\frac{2k_f}{B_T}m(t)\right]}$$

O termo de polarização $\pi B_T a A_c$ é proporcional a inclinação a da função de transferência do circuito de inclinação.

Assim, esta polarização pode ser removida utilizando um circuito de inclinação complementar com resposta em frequência $H_2(f)$ seguido de um detector de envoltória.

Circuito de inclinação complementar:



Cuja função de transferência se relaciona com a do circuito de inclinação por:

$$\boxed{\tilde{H}_2(f) = \tilde{H}_1(-f)}$$

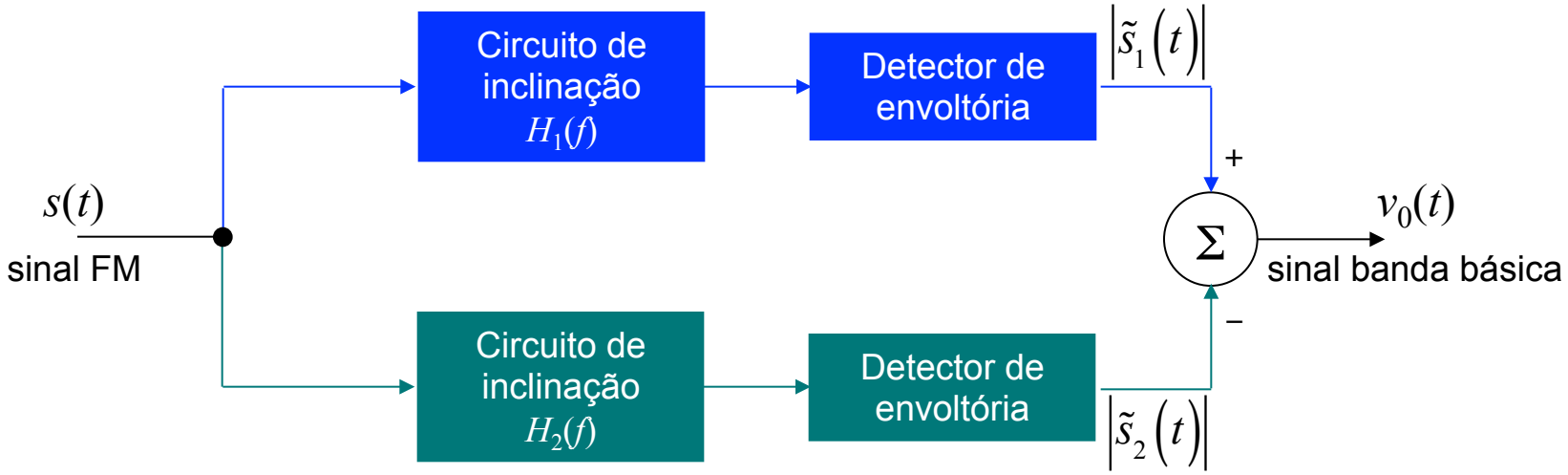
Assim, se $s_2(t)$ é a resposta do circuito de inclinação complementar ao sinal de entrada $s(t)$, então a envoltória de $s_2(t)$ será dada por:

$$\boxed{\left|\tilde{s}_2(t)\right| = \pi B_T a A_c \left[1 - \frac{2k_f}{B_T} m(t)\right]}$$

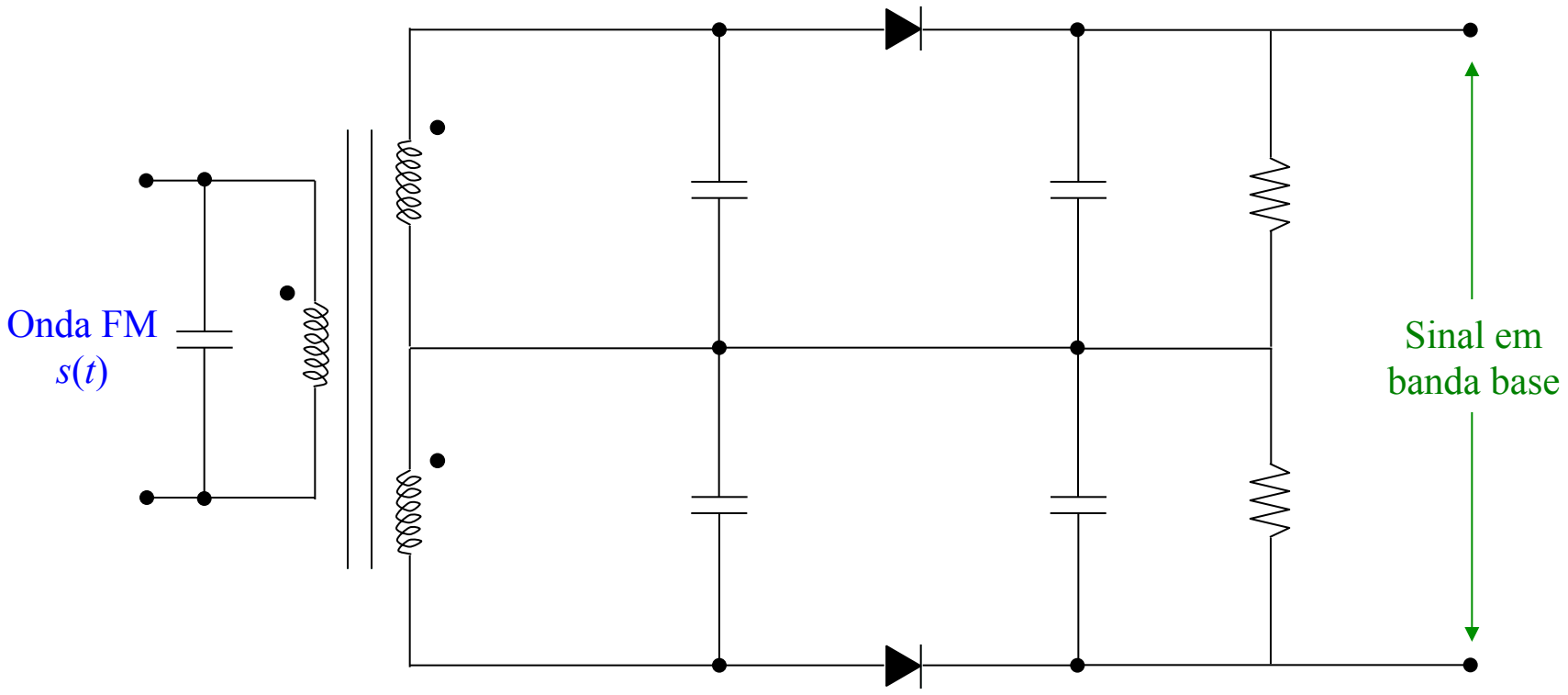
Fazendo a diferença entre as duas envoltórias obtemos:

$$v_0(t) = \left|\tilde{s}_1(t)\right| - \left|\tilde{s}_2(t)\right| = \pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t)\right] - \pi B_T a A_c \left[1 - \frac{2k_f}{B_T} m(t)\right] = 4\pi k_f a A_c m(t)$$

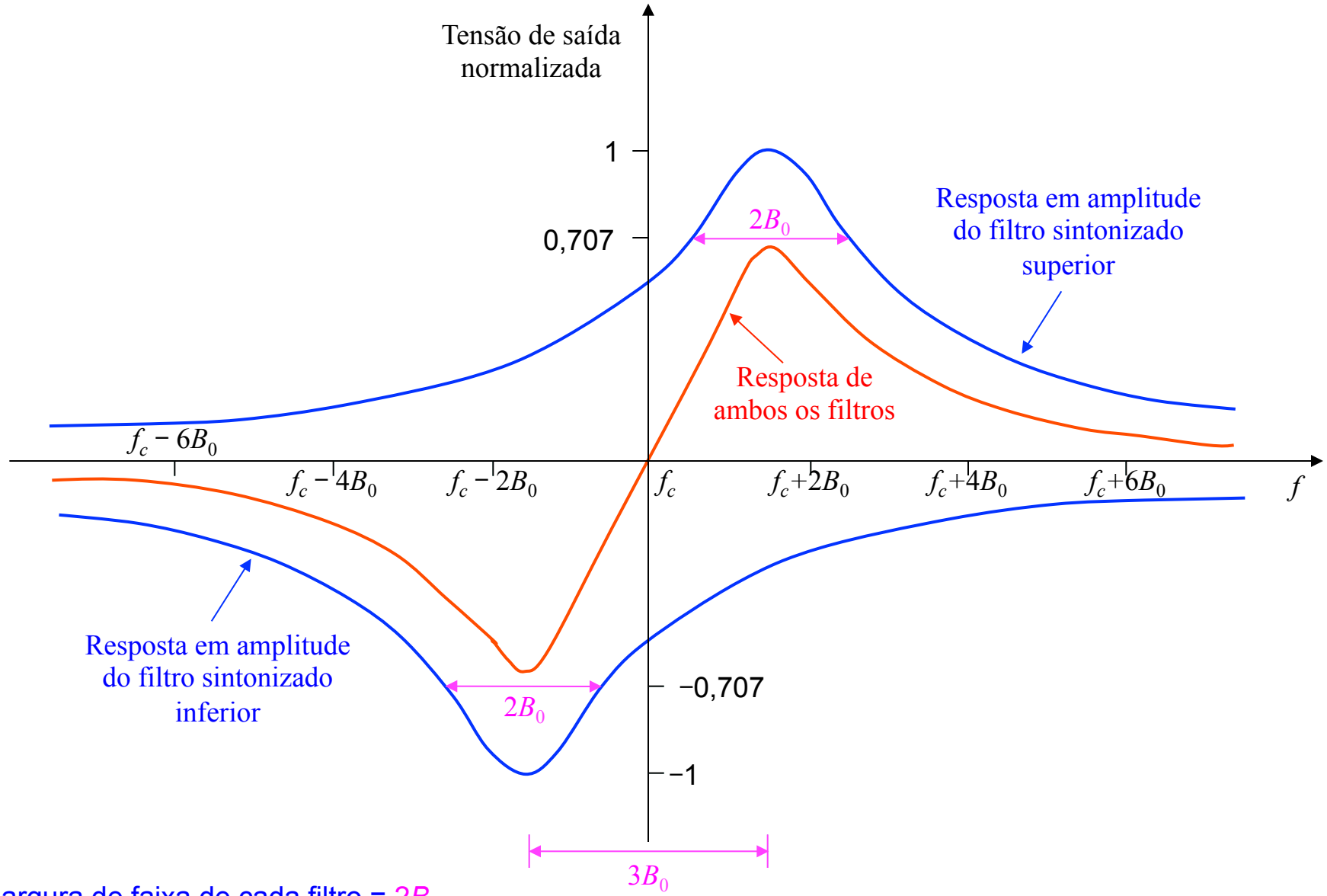
Circuito discriminador de frequência balanceado:



Circuito discriminador de frequência balanceado:



Função de transferência do discriminador:



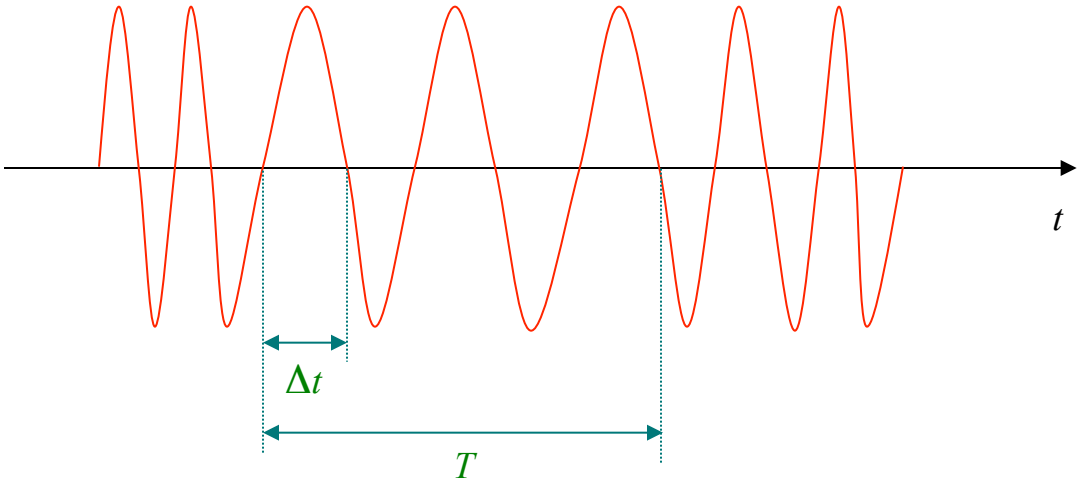
Largura de faixa de cada filtro = $2B_0$

b) Detector de cruzamentos de zero

A frequência instantânea de uma onda FM é aproximadamente dada por:

$$f_i \approx \frac{1}{2\Delta t}$$

onde Δt é a diferença de tempo entre zeros adjacentes.



T = intervalo de tempo escolhido de acordo com:

- T é pequeno se comparado com o inverso da banda W da mensagem.
- T é grande se comparado com o inverso da frequência f_c de portadora.

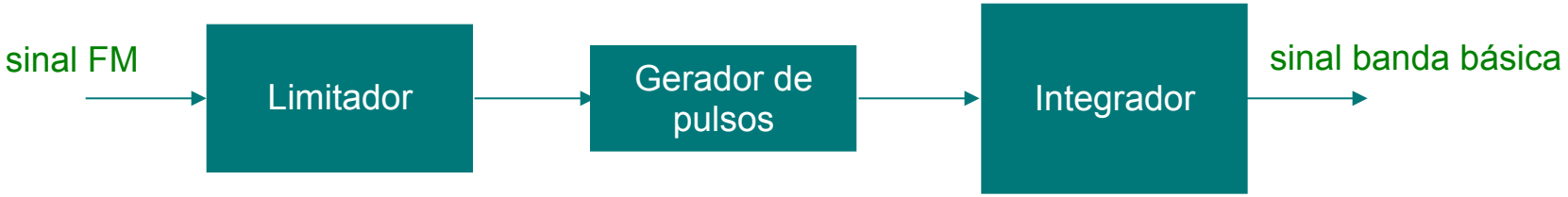
Seja n_0 o número de zeros dentro do intervalo T, então

$$\Delta t = \frac{T}{n_0}$$

Assim, podemos escrever:

$$f_i \approx \frac{n_0}{2T}$$

Note que $m(t)$ pode ser recuperada a partir do conhecimento de n_0.

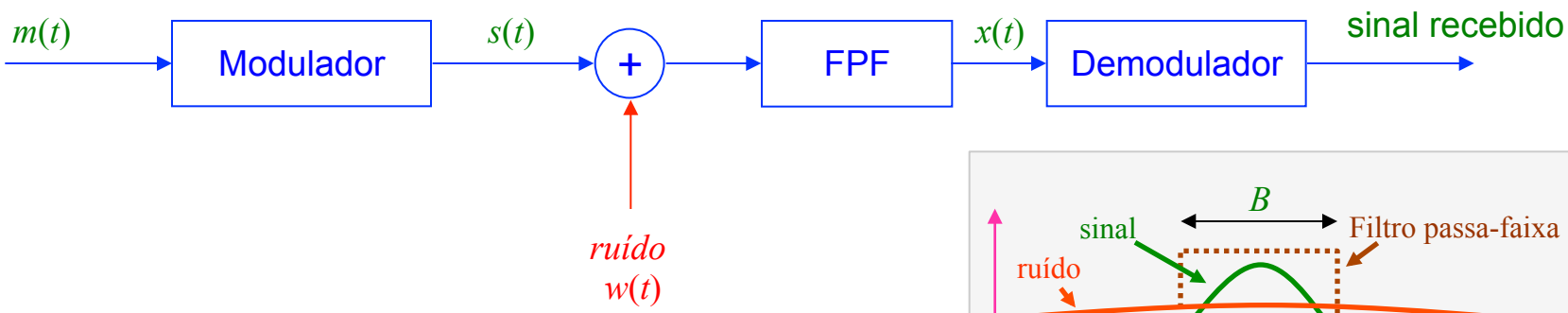


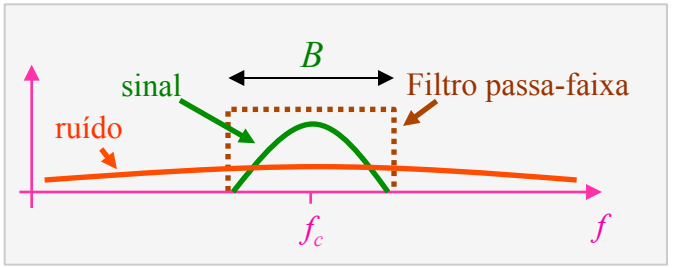
Limitador: produz uma versão quadrada da onda FM de entrada.

Gerador de pulsos: produz pulsos curtos nas bordas positivas e negativas da saída do limitador.

Integrador: faz a média no intervalo T, reproduzindo a mensagem original $m(t)$ na sua saída.

7. Ruído em Modulação Analógica





Ruído:

- flutuações aleatórias da potência em sistemas elétricos,
- fator limitante na potência necessária para transportar sinais que carregam informações em praticamente todos os canais de comunicações,
- afeta a recuperação do sinal mensagem no processo de demodulação.

Assumimos que o ruído de canal ou o ruído que chega na entrada do receptor é branco.

7.1 Razão Sinal/Ruído (SNR):

Razão Sinal/Ruído: fornece a base para o cálculo do desempenho de ruído de um receptor de comunicações analógico.

Razão Sinal/Ruído de Saída $(SNR)_0$ é a razão da potência média do sinal mensagem pela potência média do ruído, onde ambas são medidas na saída do receptor.

$$\boxed{\left(SNR\right)_0 = \frac{\text{potência média do sinal mensagem na saída do receptor}}{\text{potência média do ruído na saída do receptor}}}$$

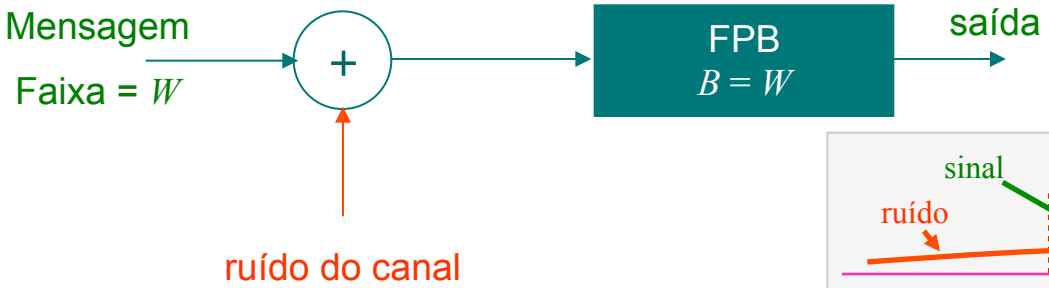
Condições:

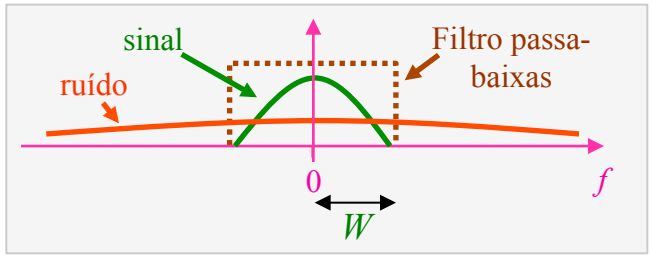
1. A mensagem recuperada e o ruído na saída do demodulador são aditivos.

2. O cálculo da $(SNR)_0$ envolve o uso de um modelo de receptor ideal.

3. Para fazer uma comparação entre diferentes sistemas de modulação é necessário utilizar o modelo de transmissão em banda básica.

Modelo de transmissão em banda básica:





Potência da mensagem = Potência do sinal modulado

Assumimos que:

a) a potência da mensagem transmitida ou modulada é fixa,

b) o filtro passa-baixas rejeita o ruído fora da faixa do sinal mensagem.

Razão sinal/ruído de canal (medida na entrada do receptor):

$$\left(SNR\right)_C = \frac{\text{potência média do sinal modulado}}{\text{potência média do ruído medido na faixa de frequência da mensagem}}$$

$(SNR)_C$ usada para comparar diferentes tipos de sistemas de modulação.

De forma equivalente:

$$\left(SNR\right)_C = \frac{\text{potência média em banda base do sinal mensagem sem modulação}}{\text{potência média do ruído medido na faixa de frequência da mensagem}}$$

Figura de mérito do sistema:

$$\text{figura de mérito} = \frac{(SNR)_0}{(SNR)_C}$$

Usada para comparar diferentes tipos de sistemas de modulação de onda contínua (CW).

Quanto maior o valor da figura de mérito melhor o desempenho de ruído do receptor.

7.2 Modelo de receptor AM

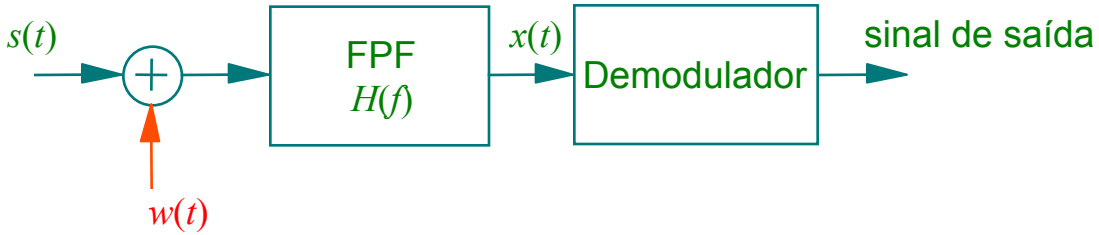
Costuma-se modelar o ruído de canal como uma função amostra de um processo ruidoso branco com média nula e com densidade espectral de potência constante.

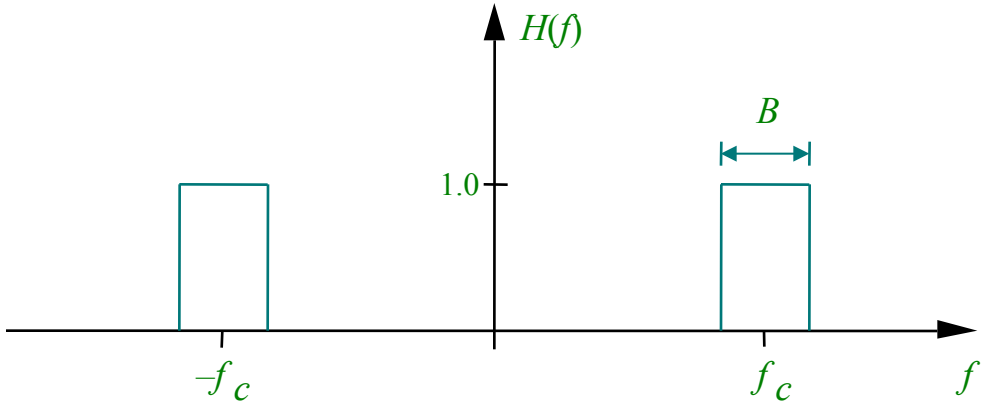
ruído de canal = $w(t)$

Densidade espectral de potência bilateral do ruído = $N_0/2$

N_0 = potência de ruído média por unidade de largura de faixa medida na entrada do receptor.

Sinal recebido = sinal modulado em amplitude $s(t)$ + ruído de canal $w(t)$.



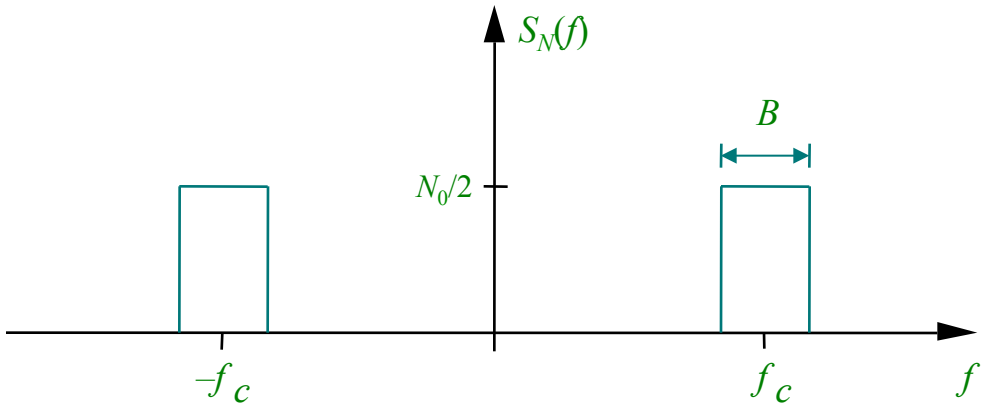


saída do filtro: $x(t) = s(t) + n(t)$

$n(t) = w(t)$ filtrado por $H(f)$.

$n(t)$ = função amostra do processo aleatório $N(t)$ com a seguinte densidade espectral de potência:

$$S_N(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2} & f_c - \dfrac{B}{2} < |f| < f_c + \dfrac{B}{2} \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$



$n(t)$ = ruído de faixa estreita.

A onda modulada $s(t)$ depende do tipo de modulação utilizada.

Para fazer a análise de ruído do receptor necessitamos da representação do ruído de faixa estreita $n(t)$.

Existem dois métodos para representação de $n(t)$:

- ✓ $n(t)$ representado em termos de suas componentes em fase e em quadratura (mais adequado para receptores AM).

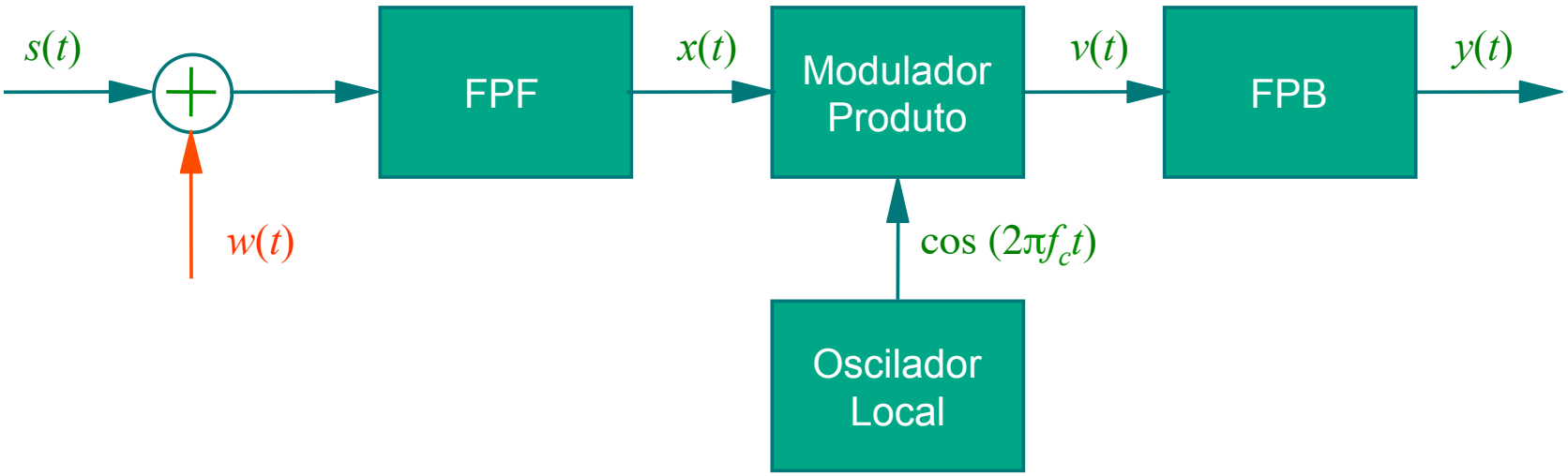
$$n(t) = n_I(t)\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)$$

- ✓ $n(t)$ representado em termos de sua envoltória e fase (mais adequado para receptores FM).

$$n(t) = r(t)\cos\left[2\pi f_c t + \psi(t)\right]$$

7.3 Razão sinal/ruído para recepção coerente

Receptor AM coerente para demodulação de sinais modulados DSB-SC e SSB.



Amplitude da onda senoidal gerada localmente $= 1$

Assumimos que o oscilador local está sincronizado em fase e frequência com a portadora do sinal transmitido.

Receptor DSB-SC:

Onda DSB-SC: $s(t) = CA_c\cos(2\pi f_c t)m(t)$

C = fator de escala dependente do sistema

Largura de faixa do sinal mensagem = $W < f_c$

Potência média do sinal mensagem $m(t)$: $P = \int_{-W}^{W} S_M\left(f\right)df$

$S_M(f)$ = densidade espectral de potência do processo aleatório que gerou $m(t)$

Potência média de do sinal modulado DSB-SC $s(t)$ = $\dfrac{C^2 A_c^2 P}{2}$

Largura de faixa de transmissão de $s(t)$: $B = 2W$

Densidade espectral de potência do ruído bilateral = $N_0/2$

Potência média do ruído na largura de faixa W da mensagem = WN_0

Razão sinal/ruído de canal:

$$\left(SNR\right)_{C,DSB-SC} = \frac{C^2 A_c^2 P}{2WN_0}$$

Razão sinal/ruído de saída:

Usando a representação de faixa estreita do ruído filtrado $n(t)$, temos na entrada do detector coerente:

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= s\left(t\right) + n\left(t\right) \\ &= CA_c \cos\left(2\pi f_c t\right) m\left(t\right) + n_I\left(t\right)\cos\left(2\pi f_c t\right) - n_Q\left(t\right)\mathrm{sen}\left(2\pi f_c t\right) \end{aligned}$$

onde $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ são as componentes em fase e em quadratura de $n(t)$, respectivamente, com respeito à portadora $\cos(2\pi f_c t)$.

Na saída do modulador produto temos:

$$v(t) = x(t)\cos(2\pi f_c t)$$

$$= \left[CA_c \cos(2\pi f_c t) m(t) + n_I(t)\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)\right]\cos(2\pi f_c t)$$

$$= \frac{CA_c}{2} m(t) + \frac{1}{2} n_I(t) + \underbrace{\frac{1}{2}\left[CA_c m(t) + n_I(t)\right]\cos(4\pi f_c t) - \frac{1}{2} n_Q(t)\,\mathrm{sen}(4\pi f_c t)}_{\text{Filtrado pelo FPB}}$$

Saída do receptor:

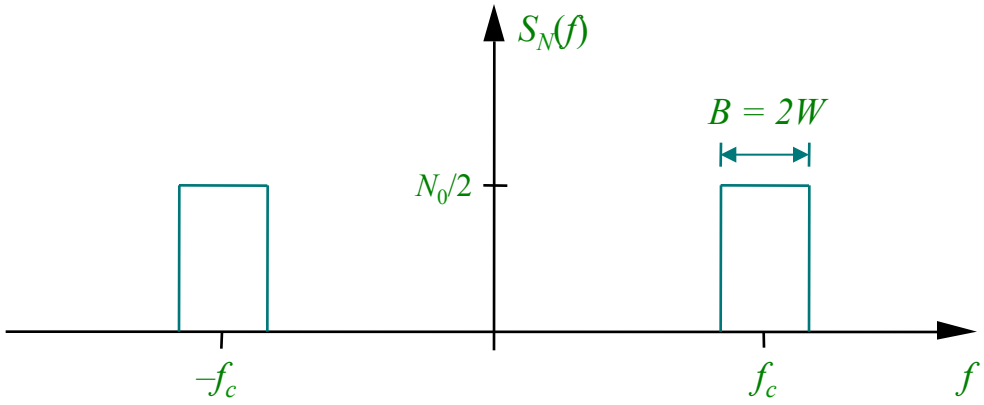
$$y(t) = \frac{CA_c}{2} m(t) + \frac{1}{2} n_I(t)$$

Note que a componente em fase do ruído $n_I(t)$ é aditiva à mensagem $m(t)$ enquanto que a componente em quadratura $n_Q(t)$ é completamente rejeitada pelo FPB do detector coerente.

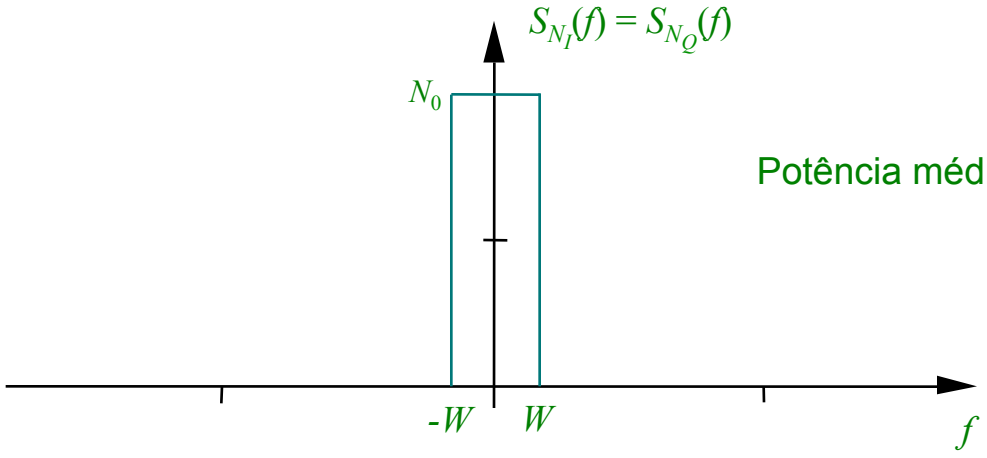
Potência média da mensagem $m(t)$ na saída do receptor = $\dfrac{C^2 A_c^2 P}{4}$

Potência média do ruído na saída do receptor:

a) densidade espectral de potência $S_N(f)$ do ruído de faixa estreita $n(t)$:



b) densidade espectral de potência da componente em fase $n_I(t)$ do ruído:



Potência média de $n_I(t) = 2WN_0$

Note que o ruído na saída do receptor é igual a $n_I(t)/2$.

Potência média do ruído na saída do receptor $= 1/4$ da área sob a curva da densidade espectral de potência da componente em fase, ou seja, $= WN_0/2$.

Razão sinal/ruído de saída:

$$\boxed{\left(SNR\right)_{0,DSB-SC} = \frac{C^2 A_c^2 P}{2WN_0}}$$

Figura de mérito:

$$\boxed{\frac{\left(SNR\right)_{0,DSB-SC}}{\left(SNR\right)_{C,DSB-SC}} = \frac{C^2 A_c^2 P}{2WN_0} \Big/ \frac{C^2 A_c^2 P}{2WN_0} = 1}$$

Receptor SSB:

$$s(t) = \frac{A_c}{2}\cos(2\pi f_c t)m(t) + \frac{A_c}{2}\text{sen}(2\pi f_c t)\hat{m}(t)$$

Onda SSB:

onde $\hat{m}(t)$ é a transformada de Hilbert do sinal mensagem $m(t)$.

Note que:

- ✓ $\hat{m}(t)$ e $m(t)$ são incorrelatas, portanto suas densidades espectrais de potência são aditivas.
- ✓ $\hat{m}(t)$ é obtida passando $m(t)$ por um filtro linear com função de transferência igual a $-j\,sgn(f)$. A magnitude ao quadrado desta função de transferência é igual a 1 para todas as frequências. Assim, $\hat{m}(t)$ e $m(t)$ possuem a mesma potência média.

Similar ao receptor DSB-SC, encontramos que cada componente em fase e em quadratura do sinal modulado SSB $s(t)$ contribuem com a mesma potência média igual a $A_c^2/8$.

A potência média de $s(t)$ é portanto = $\dfrac{A_c^2}{4}$

A potência média de ruído na largura de faixa W da mensagem = WN_0.

Então, a razão sinal/ruído de canal do receptor coerente para a modulação SSB é:

$$\left(SNR\right)_{C,SSB} = \frac{A_c^2 P}{4WN_0}$$

Largura de faixa de transmissão $B = W$.

A frequência central da faixa da densidade espectral de potência $S_N(f)$ do ruído de faixa estreita $n(t)$ difere da portadora f_c por $W/2$.

Portanto, $n(t)$ pode ser expresso por:

$$n(t) = n_I(t)\cos\left[2\pi\left(f_c - \frac{W}{2}\right)t\right] - n_Q(t)\,\mathrm{sen}\left[2\pi\left(f_c - \frac{W}{2}\right)t\right]$$

A saída do detector coerente é então dada por:

$$y(t) = \frac{A_c}{4}m(t) + \frac{1}{2}n_I(t)\cos(\pi W t) - \frac{1}{2}n_Q(t)\,\mathrm{sen}(\pi W t)$$

Note que a componente em quadratura $\hat{m}(t)$ foi eliminada na saída do detector, entretanto, a componente em quadratura do ruído $n_Q(t)$ aparece na saída.

Componente da mensagem na saída do receptor = $A_c m(t)/4$

Então a potência média da mensagem recobrada é $A_c^2 P/16$

Componente de ruído na saída do receptor:

$$\frac{1}{2}\left[n_I(t)\cos[\pi Wt]-n_Q(t)\operatorname{sen}[\pi Wt]\right]$$

Potência média para o ruído de saída = $WN_0/4$.

Assim, a razão sinal/ruído de saída de um sistema usando modulação SSB no transmissor e detecção coerente no receptor é dada por:

$$(SNR)_{0,SSB}=\frac{A_c^2P}{4WN_0}$$

A figura de mérito deste sistema é:

$$\frac{(SNR)_{0,SSB}}{(SNR)_{C,SSB}}=\frac{A_c^2P}{4WN_0}\Big/\frac{A_c^2P}{4WN_0}=1$$

Sistemas DSB e SSB usando detecção coerente no receptor possuem o mesmo desempenho em transmissão banda básica.

7.4 Ruído em Receptores usando Detecção de Envoltória

Onda AM padrão:

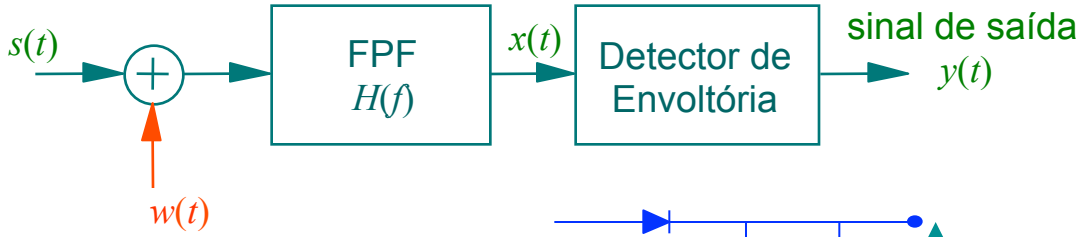
$$s(t) = A_c\left[1 + k_a m(t)\right]\cos\left(2\pi f_c t\right)$$

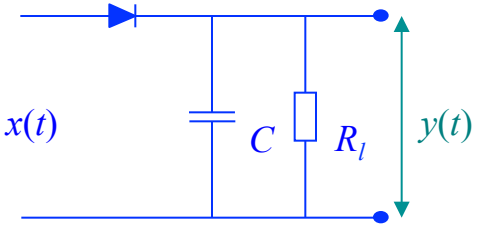
$m(t)$ é o sinal mensagem

f_c é a frequência de portadora

k_a é uma constante que determina a porcentagem de modulação.

Detector AM:





A potência média da portadora = $\dfrac{A_c^2}{2}$

A potência média do sinal modulado $s(t)$ é dada por:

$$\frac{A_c^2\left(1+k_a^2 P\right)}{2}$$

onde P é a potência média do sinal mensagem.

A potência média de ruído na largura de faixa W da mensagem é WN_0.

Então, a razão sinal/ruído de canal é dada por:

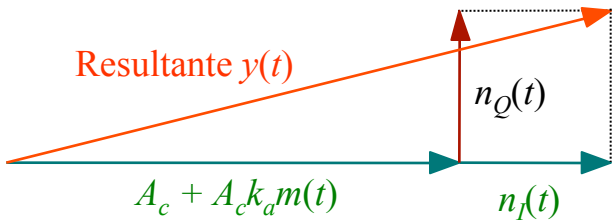
$$\boxed{\left(SNR\right)_{C,AM} = \frac{A_c^2\left(1+k_a^2 P\right)}{2WN_0}}$$

Para obter a SNR_0, o sinal recebido $x(t)$ na entrada do detector de envoltória consiste do sinal modulado $s(t)$ e do ruído de faixa estreita $n(t)$.

$$x(t) = s(t) + n(t)$$

$$= \left[A_c + A_c k_a m(t) + n_I(t)\right]\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\,\mathrm{sen}(2\pi f_c t)$$

Podemos representar $x(t)$ por meio de fasores:



Representando $n(t)$ em termos de suas componentes em fase $n_I(t)$ e em quadratura $n_Q(t)$, podemos expressar a envoltória de $x(t)$ como:

$$y(t) = \underbrace{\sqrt{\left[A_c + A_c k_a m(t) + n_I(t)\right]^2 + n_Q^2(t)}}_{\text{envoltória de } x(t)}$$

$y(t)$ define a saída de um receptor de envoltória ideal.

A fase de $x(t)$ não é de interesse pois o detector de envoltória ideal é totalmente imune a variações na fase de $x(t)$.

Quando a potência média de portadora é grande em relação a potência média de ruído, então, podemos aproximar $y(t)$ para:

$$y(t) \approx A_c + A_c k_a m(t) + n_I(t)$$

O termo dc A_c na saída do detector de envoltória pode ser removido facilmente através de um capacitor.

Note que a saída do detector possui a mesma forma do receptor DSB-SC com detecção coerente.

Razão sinal/ruído de saída:

$$\boxed{\left(SNR\right)_{0,AM} \approx \frac{A_c^2 k_a^2 P}{2WN_0}}$$

Esta expressão só é válida se:

1º) O ruído, na entrada do receptor, for pequeno comparado com o sinal.

2º) A sensitividade de amplitude k_a for ajustada para uma porcentagem de modulação menor que ou igual a 100%.

A figura de mérito é dada por:

$$\boxed{\frac{(SNR)_{0,AM}}{(SNR)_{C,AM}} \approx \frac{k_a^2 P}{1 + k_a^2 P}}$$

Note que o desempenho de ruído do receptor AM é sempre inferior ao do receptor DSB-SC ou SSB, devido a transmissão da portadora como uma componente da onda AM.

Exemplo: Modulação de um único tom (sinal mensagem): $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$

onda AM: $s(t) = A_c[1 + \mu\cos(2\pi f_m t)]\cos(2\pi f_c t)$

onde $\mu = A_m k_a$ é o fator de modulação.

A potência média da mensagem: $P = \dfrac{A_m^2}{2}$

Então, a figura de mérito é dada por:

$$\frac{(SNR)_{0,AM}}{(SNR)_{C,AM}} \approx \frac{k_a^2 P}{1 + k_a^2 P} = \frac{k_a^2 \dfrac{A_m^2}{2}}{1 + k_a^2 \dfrac{A_m^2}{2}} = \frac{\mu^2}{2 + \mu^2}$$

Se $\mu = 1 \Rightarrow$ figura de mérito $= 1/3$.

Assim, o sistema deve transmitir 3 vezes mais potência média que um sistema de modulação com portadora suprimida para ter mesma qualidade de desempenho de ruído.

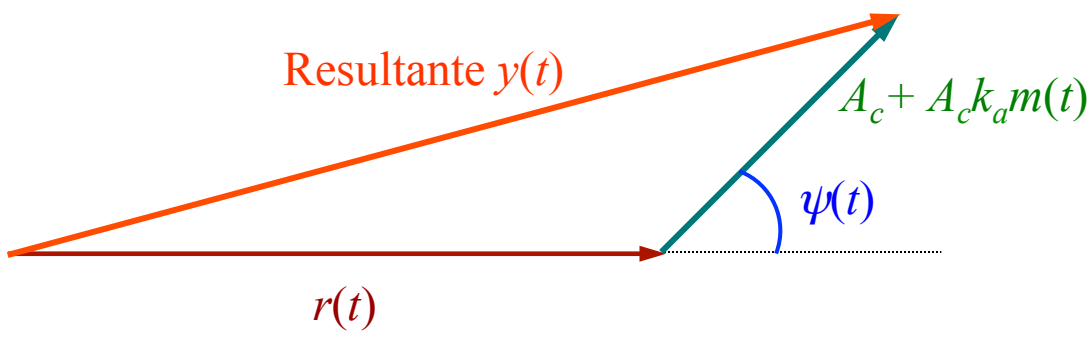
Efeito de Limiar:

Quando $(SNR)_C << 1 \Rightarrow$ o termo ruído predomina.

Neste caso, é mais conveniente representar o ruído de faixa estreita $n(t)$ em termos de sua envoltória $r(t)$ e sua fase $\psi(t)$:

$$n(t) = r(t)\cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

O diagrama de fasores para a entrada do detector $x(t) = s(t) + n(t)$:



$\psi(t)$ = fase do ruído.

Assumiu-se que a razão portadora/ruído é muito pequena $\Rightarrow$ amplitude da portadora A_c é pequena comparada com a envoltória do ruído $r(t)$.

Pode-se então desprezar a componente em quadratura do sinal em relação ao ruído, obtendo-se a saída do detector de envoltória:

$$y(t) \cong r(t) + A_c \cos[\psi(t)] + A_c k_a m(t) \cos[\psi(t)]$$

Quando a razão portadora/ruído é pequena, a saída do detector não possui uma componente estritamente proporcional à mensagem $m(t)$.

A fase $\psi(t)$ do ruído de faixa estreita $n(t)$ é uniformemente distribuída entre 0 e 2π radianos, portanto temos uma perda completa de informação na saída do detector, isto é, $m(t)$ não pode ser recuperada.

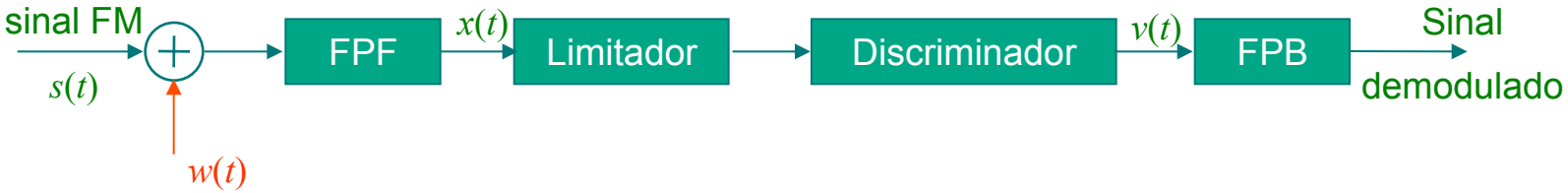
Esta perda de informação é chamada de efeito de limiar.

Efeito de limiar:

Valor da relação portadora/ruído abaixo da qual o desempenho em termos de ruído de um detector (envoltória) se deteriora com muito mais rapidamente do que proporcionalmente a relação portadora/ruído.

Obs.: O efeito de limiar não ocorre em detectores coerentes.

7.5 Modelo de receptor FM



$w(t)$ = ruído branco de média zero e densidade espectral de potência $N_0/2$.

$s(t)$ = sinal FM com frequência de portadora f_c e largura de faixa B, tal que somente uma quantidade muito pequena da potência cai fora da faixa de frequência $f_c - B/2 \leq |f| \leq f_c + B/2$.

$B > 2W$ (depende da razão de desvio de frequência da onda modulada).

W = largura de faixa do sinal mensagem.

Filtro passa-faixa é ideal, centrado em f_c e com largura de faixa igual a B $(f_c >> B)$.

$n(t)$ é o ruído $w(t)$ filtrado de faixa estreita e representado por:

$$n(t) = n_I(t)\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)$$

Limitador: remove variações de amplitude na saída do filtro passa-faixa.

Discriminador: circuito rampa ou diferenciador cuja função de transferência imaginária varia linearmente com a frequência + detector de envoltória.

A saída do discriminador é proporcional ao desvio na frequência instantânea da portadora em torno de f_c.

O filtro pós-detecção é um filtro passa-baixas ideal com uma largura de faixa igual a largura de faixa W da mensagem.

Ruído na recepção FM:

Ruído de faixa estreita $n(t)$ na saída do FPF:

$$n(t) = r(t)\cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

A envoltória $r(t)$ e a fase $\psi(t)$ são definidas em termos das componentes em fase $n_I(t)$ e em quadratura $n_Q(t)$ como se segue:

$$r(t) = \sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)}$$

$$\psi(t) = \tan^{-1}\left(\frac{n_Q(t)}{n_I(t)}\right)$$

Assumimos que o sinal FM na saída do filtro passa-faixa é dado por:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\, d\tau\right]$$

onde k_f é a sensitividade de frequência do modulador.

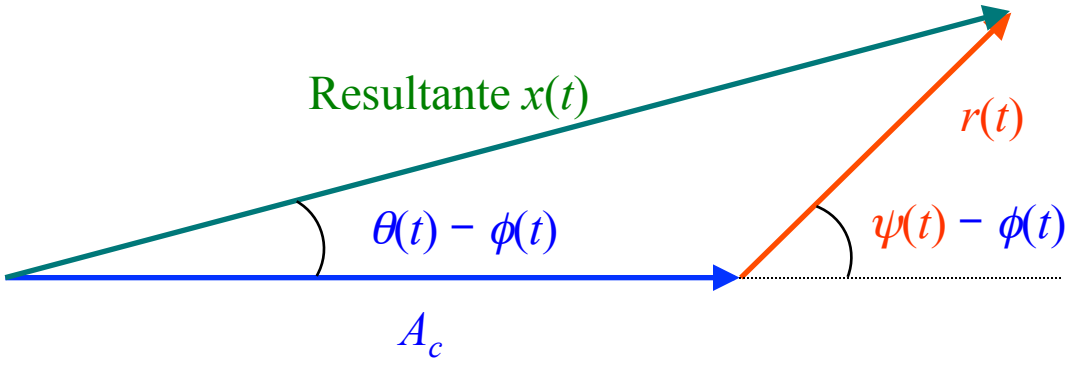
Por conveniência: $\phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\, d\tau$, então

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]$$

O sinal + ruído na saída do FPF:

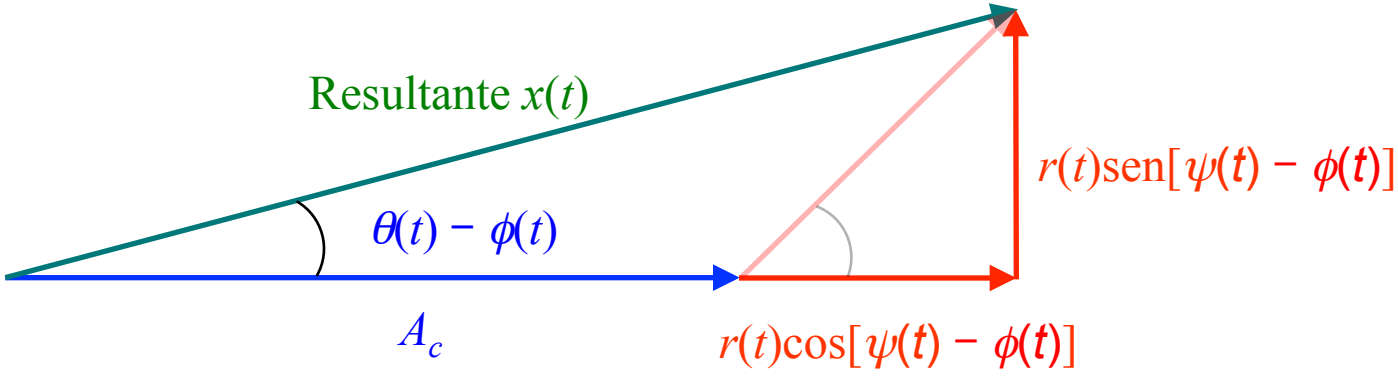
$$x(t) = s(t) + n(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right] + r(t)\cos\left[2\pi f_c t + \psi(t)\right]$$

Representação de $x(t)$ em termos de fasores :



$s(t)$ tomado como referência.

Decompondo $r(t)$, temos:



A fase relativa $\theta(t)$ do fasor resultante representando $x(t)$ é obtida diretamente da figura acima:

$$\theta(t) = \phi(t) + \tan^{-1}\left[\frac{r(t)\,\mathrm{sen}\left[\psi(t) - \phi(t)\right]}{A_c + r(t)\cos\left[\psi(t) - \phi(t)\right]}\right]$$

A envoltória de $x(t)$ não é de interesse, pois qualquer variação da envoltória na saída do FPF é removida pelo limitador.

Desejamos determinar o erro na frequência instantânea da portadora causada pela presença do ruído de faixa estreita $n(t)$.

Note que a saída do discriminador é proporcional à derivada no tempo de $\theta(t)$.

Problema: $\theta(t)$ possui uma expressão complexa.

Simplificação (aproximações):

Assumimos que a razão portadora/ruído (CNR) medida na entrada do discriminador >> 1.

Então, na maior parte do tempo, a fase relativa $\theta(t)$ se simplifica para:

$$\theta(t) \approx \underbrace{\phi(t)}_{\substack{\text{termo}\\ \text{do sinal}}} + \underbrace{\frac{r(t)}{A_c}\operatorname{sen}\left[\psi(t)-\phi(t)\right]}_{\text{termo do ruído}}$$

Mas o termo do sinal $\phi(t)$ é proporcional à integral do sinal mensagem $m(t)$, sendo dado pela relação:

$$\phi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\, d\tau$$

Então, a saída do discriminador é dada por:

$$v(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} \cong \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left\{2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\,d\tau + \frac{r(t)}{A_c}\operatorname{sen}\left[\psi(t) - \phi(t)\right]\right\}$$

$$\boxed{v(t) \cong k_f m(t) + n_d(t)}$$

onde $n_d(t) = \frac{1}{2\pi A_c}\frac{d}{dt}\left\{r(t)\operatorname{sen}\left[\psi(t) - \phi(t)\right]\right\}$

Como a (CNR) é alta, a saída do discriminador $v(t)$ consiste de uma versão escalonada da mensagem original $m(t)$ mais uma componente $n_d(t)$ de ruído aditivo.

Razão sinal/ruído de saída é a potência média de saída do sinal dividida pela potência média do ruído de saída:

Potência média do sinal na saída = $k_f^2 P$

Potência média do ruído na saída:

Complicado calcular devido ao fator $\text{sen}\left[\psi(t)-\phi(t)\right]$ presente na expressão de $n_d(t)$.

$\psi(t)$ é uniformemente distribuída entre 0 e 2π.

$\phi(t)$ é dependente da mensagem, fazendo com que componentes do espectro de potência do ruído $n_d(t)$ caiam fora da faixa do sinal.

Estas componentes de frequências não aparecem na saída do receptor, pois elas são rejeitadas pelo filtro de pós-detecção.

Podemos então fazer a fase $\phi(t)$ igual a zero para o cálculo da potência de ruído na saída do receptor. Assim,

$$n_d(t) \cong \frac{1}{2\pi A_c}\frac{d}{dt}\left\{r(t)\operatorname{sen}\left[\psi(t)\right]\right\}$$

Das definições de envoltória do ruído $r(t)$ e de fase $\psi(t)$, a componente em quadratura do ruído de faixa estreita $n(t)$ é dada por:

$$n_Q(t) = r(t)\operatorname{sen}[\psi(t)]$$

assim, $n_d(t)$ poder ser escrita como:

$$n_d(t) = \frac{1}{2\pi A_c}\frac{dn_Q(t)}{dt}$$

Portanto, a potência média de ruído na saída do receptor FM, para alta razão portadora/ruído, depende somente da amplitude A_c da portadora e da componente em quadratura $n_Q(t)$ do ruído.

Como,

$$\frac{dg(t)}{dt} \Leftrightarrow j2\pi f G(f)$$

Então, o processo ruidoso $n_d(t)$ pode ser obtido passando $n_Q(t)$ por um filtro linear com função de transferência $H(f)$ igual a:

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{2\pi A_c} = \frac{jf}{A_c}$$

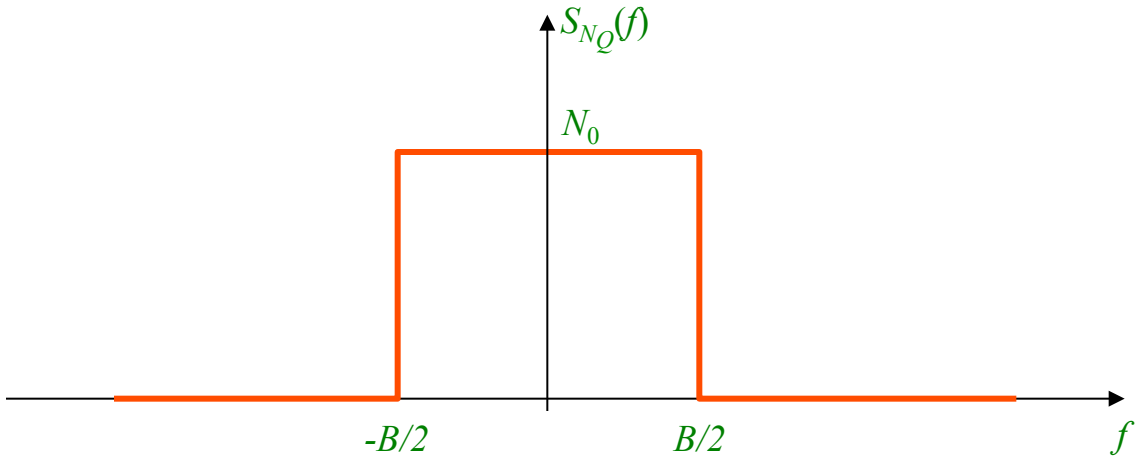
Assim, a densidade espectral de potência do ruído $n_d(t)$ está relacionada com a densidade espectral de potência do ruído de $n_Q(t)$ dada por:

$$S_{N_d}(f) = \left|H(f)\right|^2 S_{N_Q}(f)$$

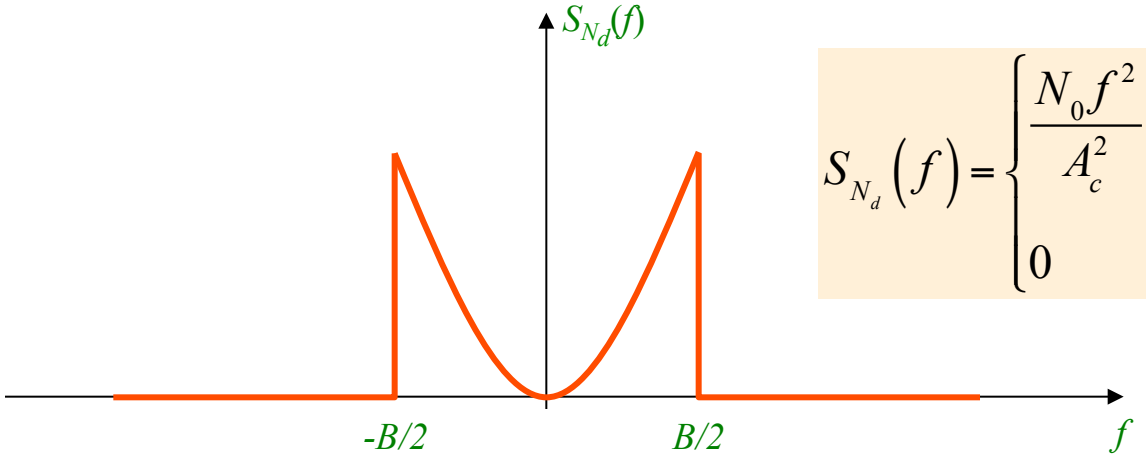
$$\boxed{S_{N_d}(f) = \frac{f^2}{A_c^2} S_{N_Q}(f)}$$

Assumindo que o filtro passa-faixa é ideal, então o ruído de faixa estreita $n(t)$ terá uma característica de densidade espectral de potência de formato similar.

A componente em quadratura $n_Q(t)$ terá a seguinte característica de passa-baixas:



A densidade espectral de potência do ruído $n_d(t)$:



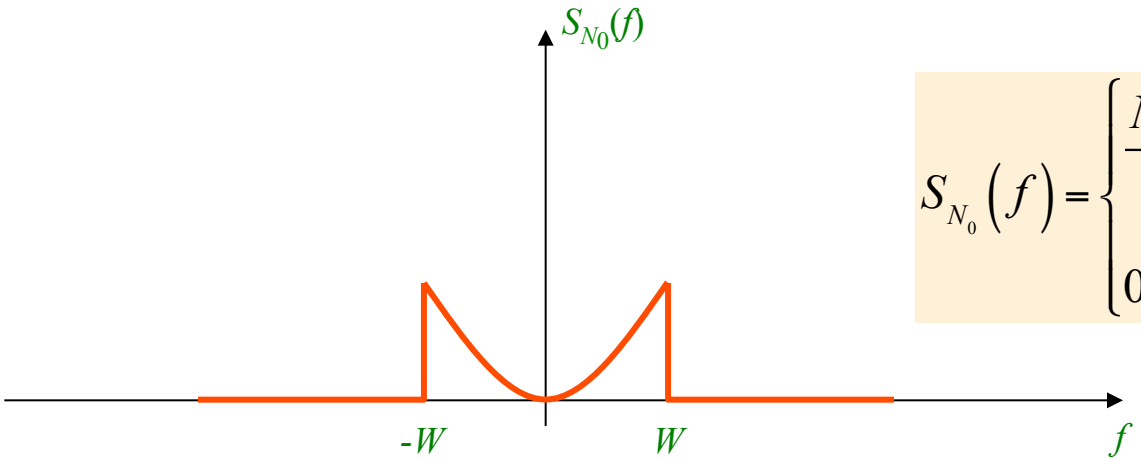
$$S_{N_d}(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0 f^2}{A_c^2} & |f| \le \dfrac{B}{2} \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

A saída do discriminador é seguida de um FPB de faixa igual a W .

Para FM de faixa larga, $W << B/2$.

Então, as componentes fora da faixa do ruído $n_d(t)$ serão rejeitadas.

Portanto, a densidade espectral de potência $S_{N_0}(f)$ do ruído $n_0(t)$ que aparece na saída do receptor é definida por:



$$S_{N_0}(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0 f^2}{A_c^2} & |f| \le W \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

A potência média do ruído de saída é dada por:

$$\overline{P}_{ruído} = \frac{N_0}{A_c^2}\int_{-W}^{W} f^2\, df = \frac{2N_0W^3}{3A_c^2}$$

Note que a potência média de ruído de saída é inversamente proporcional à potência média de portadora $A_c^2/2$ $\Rightarrow$ aumentar a potência da portadora possui o efeito de "aquietar" o ruído.

Razão sinal/ruído de saída:

$$\boxed{\left(SNR\right)_{0,FM} = \frac{3A_c^2 k_f^2 P}{2N_0 W^3}}$$

A potência média do sinal modulado $s(t)$ é igual a $A_c^2/2$.

A potência média do ruído na largura de faixa da mensagem é WN_0.

Então, a razão sinal/ruído de canal é dada por:

$$\boxed{\left(SNR\right)_{C,FM} = \frac{A_c^2}{2N_0 W}}$$

Figura de mérito:

$$\boxed{\frac{\left(SNR\right)_{0,FM}}{\left(SNR\right)_{C,FM}} = \frac{3k_f^2 P}{W^2}}$$

O desvio de frequência Δf é proporcional a sensitividade de frequência k_f do modulador.

Razão de desvio: $D = \Delta f / W$

Assim, a figura de mérito de um FM de faixa larga é uma função quadrática da razão de desvio D.

$$\boxed{\frac{(SNR)_{0,FM}}{(SNR)_{C,FM}} = \frac{3k_f^2 P}{W^2} = 3a^2 D^2 P \qquad a = \text{cte}}$$

Em FM faixa larga, a largura de faixa B de transmissão é aproximadamente proporcional a razão de desvio D.

Portanto, quando a razão portadora/ruído é alta, um aumento na faixa de transmissão B fornece um aumento ao quadrado correspondente na razão sinal/ruído de saída ou figura de mérito do sistema FM.

Exemplo: Modulação por um tom

onda modulada: $$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m}\operatorname{sen}(2\pi f_m t)\right]$$

onde $$2\pi k_f \int_0^t m(\tau)\,d\tau = \frac{\Delta f}{f_m}\operatorname{sen}(2\pi f_m t)$$

Diferenciando em relação ao tempo ambos os lados, temos:

$$m(t) = \frac{\Delta f}{k_f}\cos(2\pi f_m t)$$

Potência média do sinal mensagem:

$$P = \frac{(\Delta f)^2}{2k_f^2}$$

Razão sinal/ruído de saída:

$$\left(SNR\right)_{0,FM} = \frac{3A_c^2 k_f^2 P}{2N_0 W^3} = \frac{3A_c^2 k_f^2 \left(\Delta f\right)^2}{2N_0 W^3 2k_f^2} = \frac{3A_c^2 \beta^2}{4N_0 W}$$

$\beta = \Delta f / W$

Figura de mérito:

$$\frac{\left(SNR\right)_{0,FM}}{\left(SNR\right)_{C,FM}} = \frac{3\left(\Delta f\right)^2}{2W^2} = \frac{3}{2}\beta^2$$

Importante: O índice de modulação $\beta = \Delta f / W$ é determinado pela largura de faixa W do filtro passa-baixas de pós-detecção e **não** é relacionado com a frequência f_m da mensagem. Para uma específica largura de faixa W, a frequência da mensagem f_m pode cair em qualquer lugar entre 0 e W fornecendo a mesma razão sinal/ruído de saída.

Comparação AM x FM:

Figura de mérito para AM (100% de índice de modulação):

$$\frac{(SNR)_{0,AM}}{(SNR)_{C,AM}} = \frac{1}{3}$$

Note que a modulação FM oferece a possibilidade de melhorar a razão sinal/ ruído sobre a modulação AM quando:

$$\frac{3}{2}\beta^2 > \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \beta > \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ou seja, $\beta > 0{,}471$

Podemos considerar $\beta = 0{,}5$ como sendo o limiar de transição do FM de faixa estreita para o FM de faixa larga.

Efeito de Captura:

A capacidade do FM de minimizar os efeitos de sinais indesejados (ex.: ruído) também se aplica a interferência produzida por outro sinal modulado FM com um conteúdo de frequência próximo da frequência de portadora da onda FM desejada.

Entretanto, a supressão da interferência em um receptor FM funciona bem apenas quando a interferência é mais fraca que a onda de entrada FM desejada.

Quando a interferência é forte, o receptor sintoniza no sinal mais forte e portanto suprime a entrada FM desejada.

Quando a interferência e a entrada FM desejada possuem aproximadamente o mesmo valor, o receptor flutua entre estes sinais.

Este fenômeno é conhecido como efeito de captura.

8. COMPARAÇÃO ENTRE AS DIVERSAS TÉCNICAS DE MODULAÇÃO

Sinal mensagem $m(t)$ = onda senoidal.

Razão sinal/ruído de canal é a mesma para todos os sistemas de modulação.

Largura de faixa de transmissão normalizada:

$$\boxed{B_n = \frac{B}{W}}$$

B = largura de faixa de transmissão.

W = largura de faixa da mensagem.

1. AM padrão com detecção por envoltória:

$$\left(SNR\right)_0 = \frac{\mu^2}{2+\mu^2}\left(SNR\right)_C$$

Esta relação é traçada no gráfico, para μ = 1.

Nesta curva está também incluído o efeito de limiar.

Largura de faixa de transmissão normalizada $B_n = 2$.

2. DSB-SC ou SSB com detecção coerente:

$$\left(SNR\right)_0 = \left(SNR\right)_C$$

O desempenho destes sistemas é superior ao do AM com detecção de envoltória em 4.8 dB.

Nenhum dos sistemas DSB-SC e SSB exibem efeito de limiar.

Para DSB-SC $B_n = 2.$

Para SSB $B_n = 1.$

Assim, a modulação SSB é ótima com respeito a desempenho de ruído e conservação de faixa entre as modulações AM.

3. FM com discriminador convencional:

$$\left(SNR\right)_0 = \frac{3}{2}\beta^2\left(SNR\right)_C$$

onde β é o índice de modulação.

Esta relação é mostrada no gráfico para $\beta = 2$ e $\beta = 5$, respectivamente.

Em ambos os casos, está incluído os $13\ \mathrm{dB}$ de melhora tipicamente obtido pela pré-ênfase e de-ênfase.

Largura de faixa de transmissão (regra de Carson):

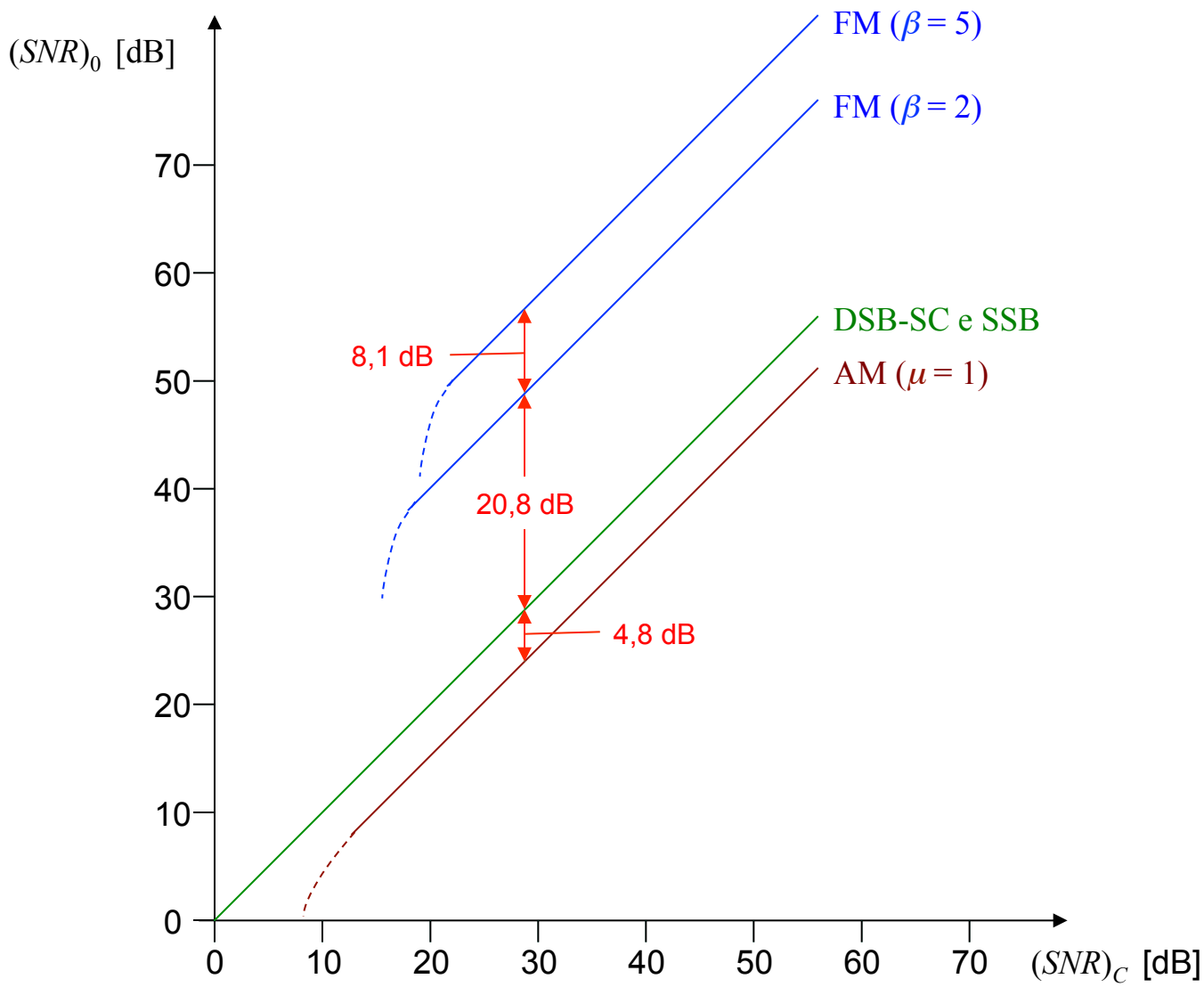
$B_n = 6$ para $\beta = 2$

$B_n = 12$ para $\beta = 5$

Comparando com o SSB, o FM de faixa larga tem uma melhora na razão sinal/ruído de saída igual a $20{,}8$ dB para $B_n = 6$ e de $28{,}9$ dB para $B_n = 12$.

Preço pago ==> aumento da largura de faixa de transmissão.

Assume-se que o FM opera acima do limiar para que a melhora em termos de ruído seja realizável. As curvas do FM no gráfico incluem o efeito de limiar.



Obs.: Curvas do FM incluem 13 dB de pré-ênfase e de-ênfase.