Capítulo 6

Receptores Ótimos e Modulação Digital

1. Receptores Ótimos para Comunicação de Dados

Projeto de receptores: sinal fraco somado ao ruído aditivo.

Propósito da detecção: estabelecer a presença ou a ausência de um sinal em ruído.

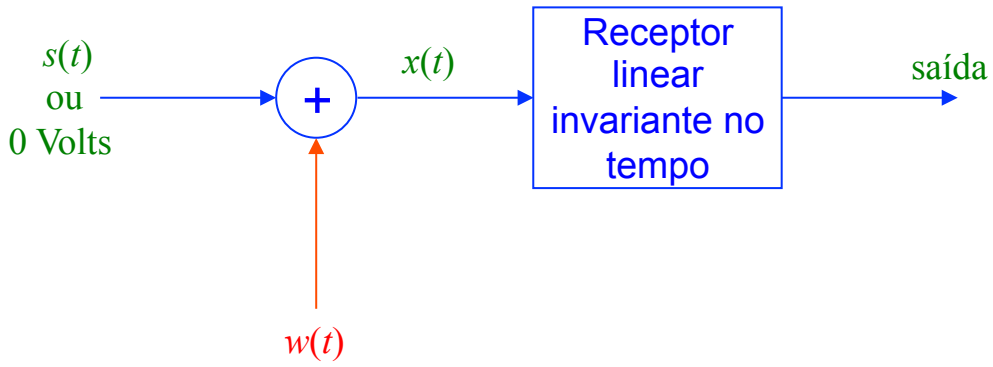
Sistema de detecção: filtro de pré-detecção + dispositivo de decisão.

Quando o ruído aditivo é branco (densidade espectral de potência constante) a solução ótima para o filtro de pré-detecção é um filtro casado.

Filtro casado:

- ✧ sua caracterização é casada com o sinal componente da onda recebida.
- ✧ maximiza a razão sinal/ruído de saída.

2. Formulação do problema do receptor ótimo



$w(t)$ = ruído gaussiano branco com média zero e densidade espectral de potência = $N_0/2$.

Uma amostra retirada do processo gaussiano possui uma distribuição de probabilidade gaussiana para sua amplitude.

Desejamos estimar se temos na entrada do receptor só ruído ou ruído + sinal:

$$x(t) = w(t) \quad \text{ou} \quad x(t) = s(t) + w(t)$$

Se o sinal $s(t)$ está presente em $x(t)$, a saída do receptor linear invariante no tempo, em algum instante de tempo arbitrário $t = T$, será consideravelmente maior que se $s(t)$ estiver ausente.

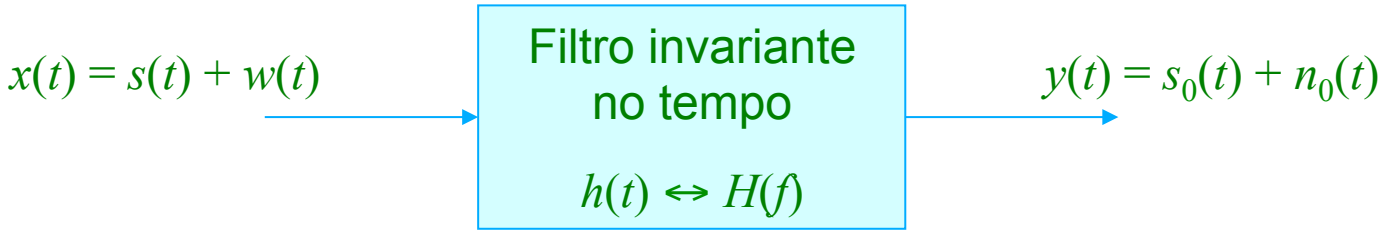
Métodos de resolução do problema de otimização:

- maximização da razão sinal/ruído na saída do receptor $\Rightarrow$ receptor filtro casado
- critério probabilístico $\Rightarrow$ receptor de correlação

Para ruído gaussiano aditivo branco (AWGN):

receptor filtro casado $\Leftrightarrow$ receptor de correlação

3. Maximização da razão sinal/ruído de saída



$s_0(t)$ = componente do sinal $s(t)$ na saída do filtro.

$n_0(t)$ = componente do ruído branco $w(t)$ na saída do filtro.

Como o filtro é linear, podemos utilizar o princípio da sobreposição e analisar o sinal e o ruído na saída do filtro separadamente.

Seja $s(t) \Leftrightarrow S(f)$, então, a transformada de Fourier de $s_0(t)$ é dada por:

$$S_0(f) = H(f)S(f)$$

logo,

$$s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f)\exp(j2\pi ft)df = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)H(f)\exp(j2\pi ft)df$$

Efeito do ruído $w(t)$ na saída do filtro:

Densidade espectral de potência do ruído de saída $n_0(t)$:

$$\boxed{S_{N_0}(f) = \frac{N_0}{2}\left|H(f)\right|^2}$$

Potência média do ruído $n_0(t)$ de saída :

$$\boxed{\eta_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{N_0}(f)\,df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df}$$

Um modo simples de descrever a exigência de que a saída do filtro deva ser consideravelmente maior quando o sinal $s(t)$ está presente do que na sua ausência, é fazer com que, no tempo $t = T$, o filtro faça a potência instantânea do sinal de saída $s_0(t)$ o maior possível em comparação com a potência média do ruído de saída $n_0(t)$.

Isto é equivalente a maximizar a razão sinal/ruído de saída definida por:

$$\left(SNR\right)_0 = \frac{\left|s_0\left(T\right)\right|^2}{\eta_0}$$

$$= \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H\left(f\right)S\left(f\right)\exp\left(j2\pi fT\right)df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H\left(f\right)\right|^2 df}$$

Problema:

Para $S(f)$ fixo, qual é a $H(f)$ do filtro que maximiza a a razão sinal/ruído de saída $(SNR)_0$?

$$\left(SNR\right)_0 = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H\left(f\right)S\left(f\right)\exp\left(j2\pi fT\right)df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H\left(f\right)\right|^2 df}$$

Solução:

Desigualdade de Schwarz!

Desigualdade de Schwarz:

Dada duas funções complexas $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$, tais que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\phi_1(x)\right|^2 dx < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\phi_2(x)\right|^2 dx < \infty$$

Então, temos

$$\boxed{\left|\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x)\phi_2(x)\,dx\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\phi_1(x)\right|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} \left|\phi_2(x)\right|^2 dx}$$

onde a igualdade só vale se

$$\boxed{\phi_1(x) = k\phi_2^*(x)}$$

k = constante.

Aplicação da desigualdade de Schwarz:

Função complexa da frequência:

$$H(f)S(f)\exp(j2\pi fT) = H(f) \times S(f)\exp(j2\pi fT).$$

Desigualdade de Schwarz para integrais de funções complexas:

$$\boxed{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)\exp(j2\pi fT)\,df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df \int_{-\infty}^{\infty}\left|S(f)\right|^2 df}$$

onde

$$\left|S(f)\exp(j2\pi fT)\right| = \left|S(f)\right|$$

A desigualdade de Schwarz possui a igualdade satisfeita se e somente se $H(f)$ for o complexo conjugado de $S(f)\exp(j2\pi fT)$, a menos de um fator de escala.

Então,

$$\boxed{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(f)S(f)\exp(j2\pi fT)\,df\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df \int_{-\infty}^{\infty}\left|S(f)\right|^2 df}$$

se e somente se

$$\boxed{H_{opt}(f) = S^*(f)\exp(-j2\pi fT)}$$

onde $S^*(f)$ é o complexo conjugado de $S(f)$.

Filtro Casado

Usando a desigualdade de Schwarz na equação de razão sinal/ruído de saída temos:

$$\left(SNR\right)_0 = \frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty} H\left(f\right)S\left(f\right)\exp\left(j2\pi fT\right)df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H\left(f\right)\right|^2 df} \leq \frac{\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}\left|H\left(f\right)\right|^2 df}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S\left(f\right)\right|^2 df}{\frac{N_0}{2}\cancel{\int_{-\infty}^{\infty}\left|H\left(f\right)\right|^2 df}}$$

ou seja,

$$\boxed{\left(SNR\right)_0 \leq \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S\left(f\right)\right|^2 df}$$

Então, a razão sinal/ruído de saída será máxima quando $H(f)$ for tal que:

$$\left(SNR\right)_{0,opt} = \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S\left(f\right)\right|^2 df$$

Esta condição é satisfeita quando $H(f)$ assume seu valor ótimo:

$$\boxed{H_{opt}\left(f\right) = S^*\left(f\right)\exp\left(-j2\pi fT\right)}$$

Este filtro é denominado de filtro casado.

Resposta ao impulso do filtro casado:

$$h_{opt}\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} S^*\left(f\right)\exp\left[-j2\pi f\left(T-t\right)\right]df$$

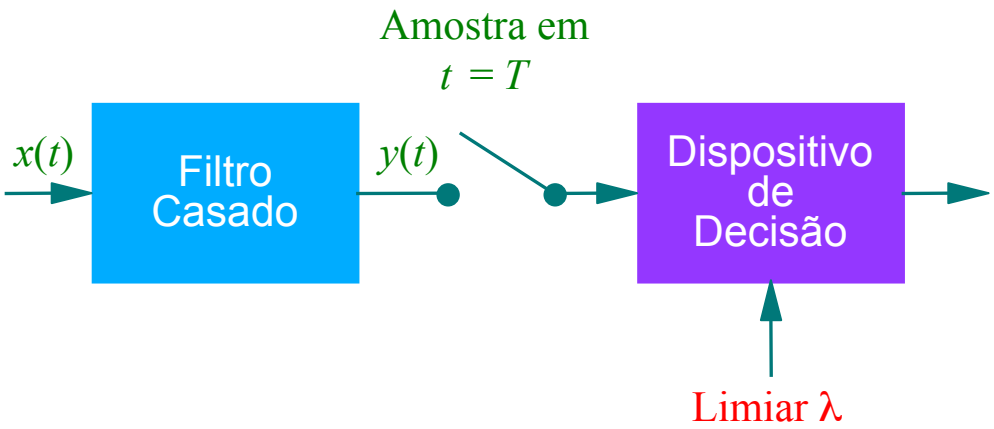
Para um sinal $s(t)$ real, temos $S^*(f) = S(-f)$, então

$$h_{opt}\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} S\left(-f\right)\exp\left[-j2\pi f\left(T-t\right)\right]df = s\left(T-t\right)$$

$$h_{opt}(t) = s(T - t)$$

Note que na obtenção do resultado acima, a única consideração feita foi de que o ruído $w(t)$ era branco com média zero e densidade espectral de potência igual a $N_0/2$.

Receptor ótimo:



Se $y(T) > \lambda$ $\Rightarrow$ $s(t)$ presente

Caso contrário $\Rightarrow$ $s(t)$ ausente

Para o filtro casado ser realizável na prática ele tem que ser causal, isto é:

$$h_{opt}(t) = \begin{cases} s(T-t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Se todo o sinal de entrada $s(t)$ deve contribuir para a componente de sinal de saída $s_0(t)$, devemos ter:

$$s(t) = 0 \qquad t > T$$

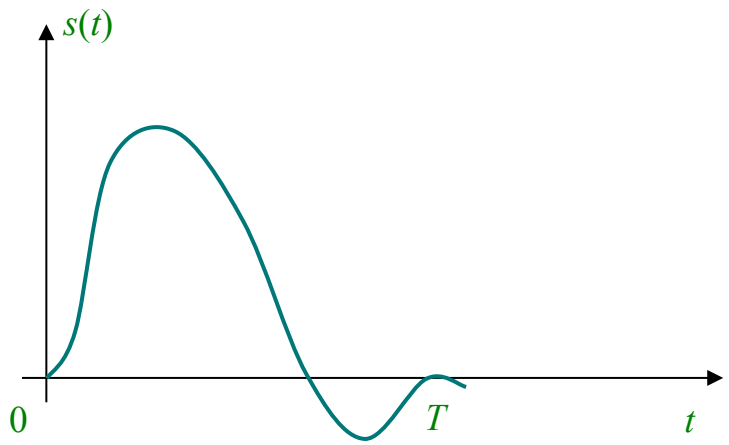
Esta relação diz que: todo o sinal $s(t)$ deve ter entrado no filtro até o tempo $t = T$ no qual é desejado se obter uma amostra com a máxima razão sinal/ruído de saída.

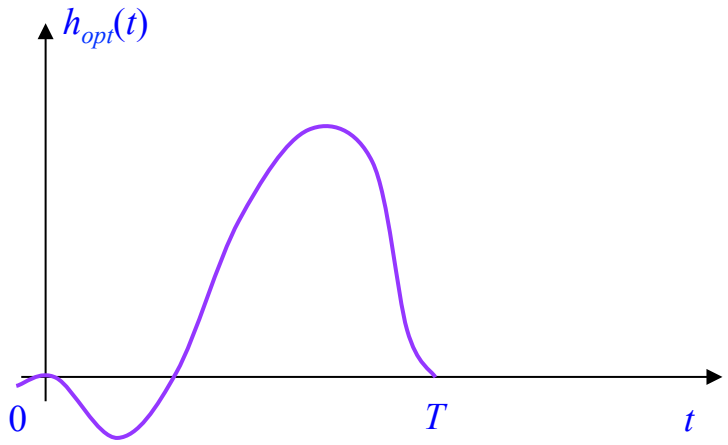
Para $h_{opt}(t)$ possuir dimensão correta, o termo $s(T - t)$ deve ser multiplicado por um fator de escala k, que faz com que a resposta ao impulso do filtro casado assuma uma dimensão que é a recíproca do tempo. Assim, $H_{opt}(f)$ se torna adimensional.

3. Propriedades dos filtros casados

Resposta ao impulso do filtro casado: $h_{opt}(t) = s(T - t)$

Função de transferência: $H_{opt}(f) = S^*(f)\exp(-j2\pi fT)$





Propriedade 1: O espectro do sinal de saída de um filtro casado ao sinal de entrada é, exceto por um fator de atraso no tempo, proporcional a densidade espectral de energia do sinal de entrada.

Seja $S_0(f)$ a transformada de Fourier da saída do filtro $s_0(t)$, então

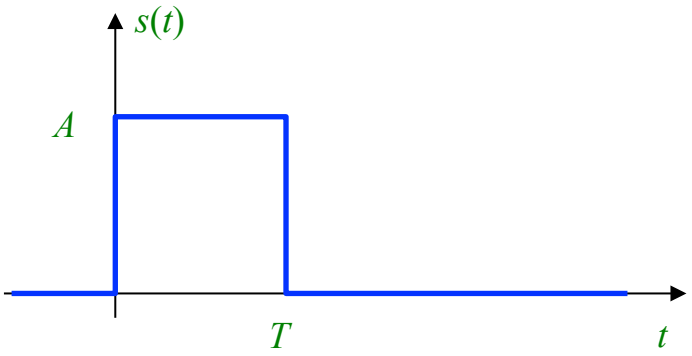
$$\begin{aligned} S_0(f) &= H_{opt}(f)S(f) \\ &= S^*(f)S(f)\exp(-j2\pi fT) \\ &= |S(f)|^2 \exp(-j2\pi fT) \end{aligned}$$

Note que $|S(f)|^2$ é a densidade espectral de energia de $s(t)$.

Exemplo: Filtro casado para um pulso retangular

Pulso retangular:

$$s(t) = \begin{cases} A & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$



Por conveniência assumimos que o pulso $s(t)$ possui área unitária: $AT = 1$.

Então,

$$S(f) = \text{sinc}(fT)\exp(-j\pi fT)$$

Resposta ao impulso do filtro casado é também um pulso retangular:

$$h_{opt}(t) = \begin{cases} A & 0 \le t \le T \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

A função de transferência deste filtro casado é (assumindo $AT = 1$):

$$H_{opt}(f) = \text{sinc}(fT)\exp(-j\pi fT)$$

A transformada de Fourier da saída do filtro casado é portanto:

$$\begin{aligned} S_0(f) &= H_{opt}(f)S(f) \\ &= \text{sinc}(fT)\exp(-j\pi fT)\cdot\text{sinc}(fT)\exp(-j\pi fT) \\ &= \boxed{\text{sinc}^2(fT)\exp(-j2\pi fT)} \end{aligned}$$

O fator $\text{sinc}^2(fT)$ é a densidade espectral de energia do pulso retangular $s(t)$, para área igual a unidade. Então, $S_0(f)$ está de acordo com a propriedade 1.

Propriedade 2: O sinal de saída do filtro casado é proporcional a uma versão deslocada da função de autocorrelação do sinal de entrada para o qual o filtro é casado.

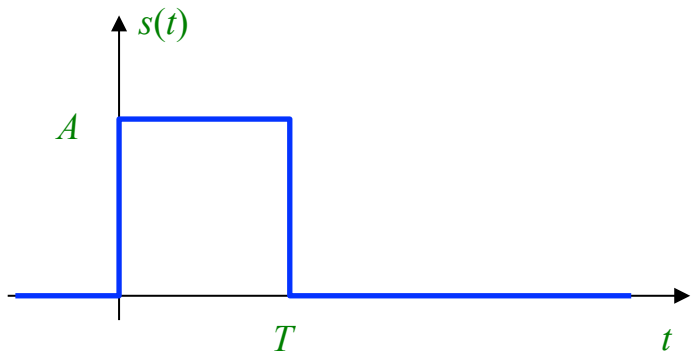
$$S_0\left(f\right) = \mathrm{sinc}^2\left(fT\right)\exp\left(-j2\pi fT\right)$$

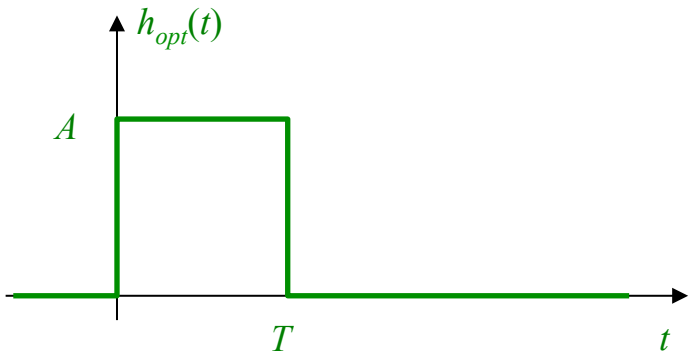
Autocorrelação de $s(t)$ para uma diferença de tempo τ: $R_s(\tau) \Leftrightarrow S_0(f)$

Então a saída do filtro casado fica:

$$s_0(t) = R_s(t - T)$$

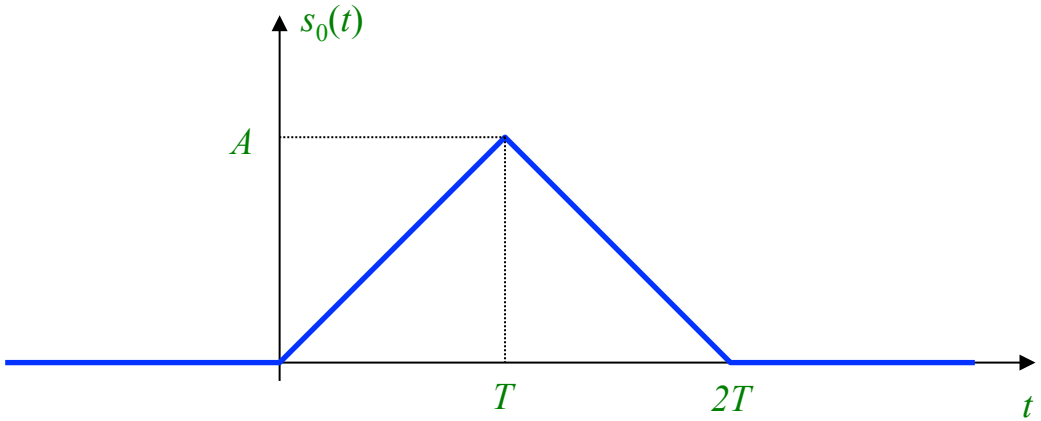
Exemplo: Filtro casado para um pulso retangular

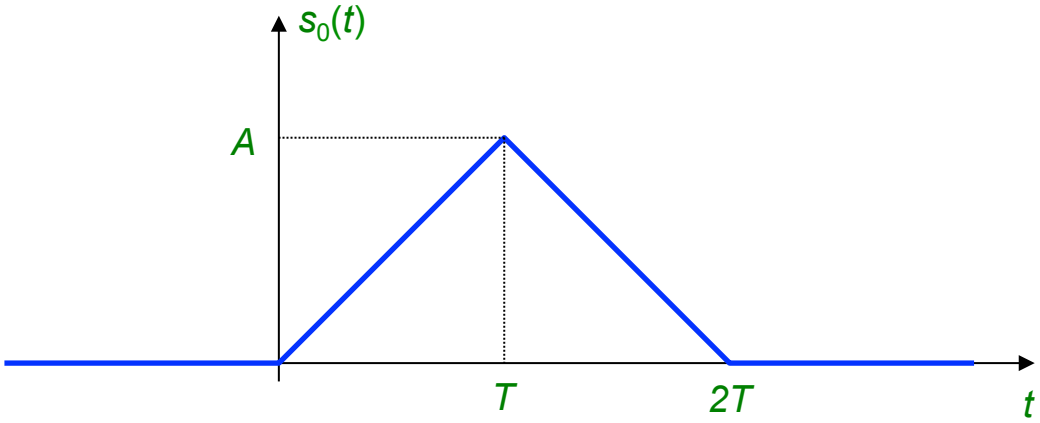




Fazendo a convolução de $s(t)$ com $h_{opt}(t)$ encontramos que a saída do filtro casado $s_0(t)$ é dada por $(AT = 1)$:

$$s_0(t) = \begin{cases} \dfrac{At}{T} & 0 < t \le T \\ A\left(2 - \dfrac{t}{T}\right) & T < t \le 2T \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

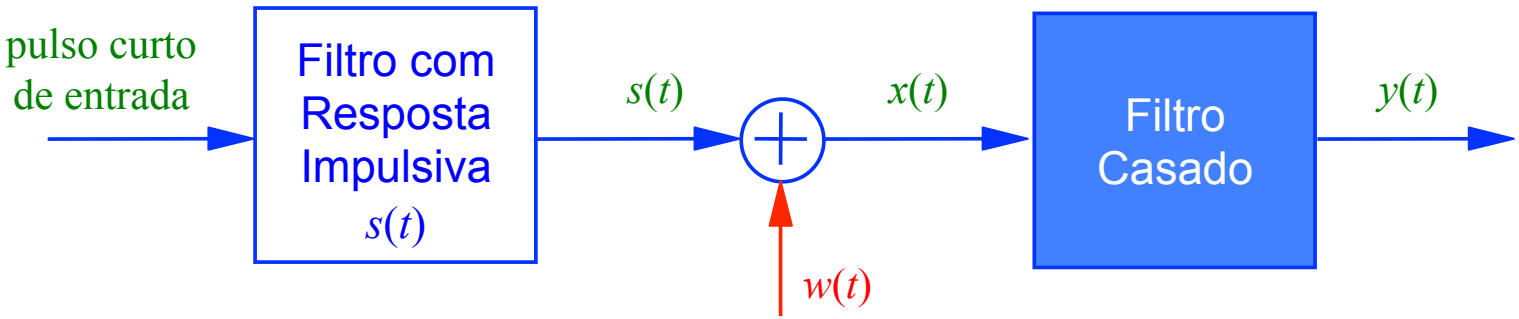




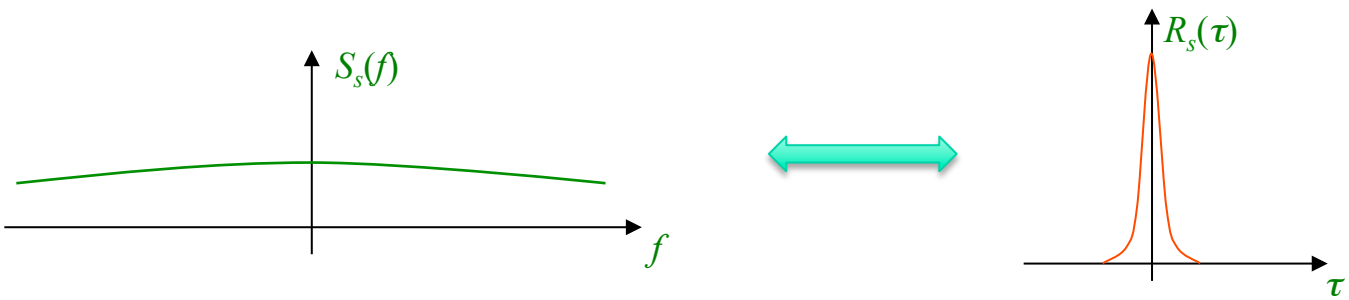
A forma de onda acima é a função de autocorrelação de $s(t)$ deslocada de T segundos.

Note que a saída do filtro casado $s_0(t)$ assume seu valor máximo em $t = T$.

Exemplo: Par de filtros casados



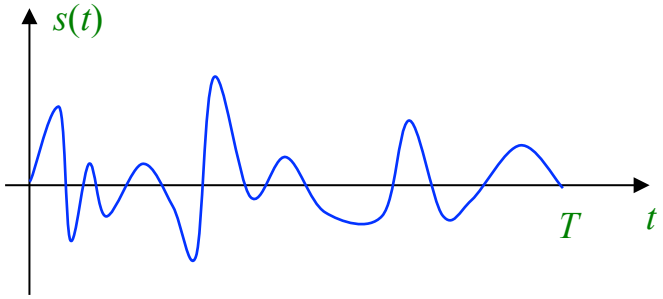
Suponha $s(t)$ com duração de 0 a T, com a aparência e o caráter de uma função amostra de um processo aleatório com densidade espectral de potência ampla, tal que sua função de autocorrelação se aproxime da função delta.



$s(t)$ é gerado aplicando-se um pulso curto, no tempo $t = 0$, em um filtro linear com resposta ao impulso $s(t)$.

O sinal de entrada do filtro tem componentes ocupando uma faixa muito ampla de frequência, mas suas amplitudes e fases são tais que elas se adicionam construtivamente somente ao redor do tempo $t = 0$ e cancelam-se em outros lugares.

Filtro gerador do sinal $\Rightarrow$ codificador onde as componentes de amplitude e de fase do sinal de entrada similares ao impulso são codificadas de modo que a saída aparenta com ruído, com duração de 0 a T, tal como:

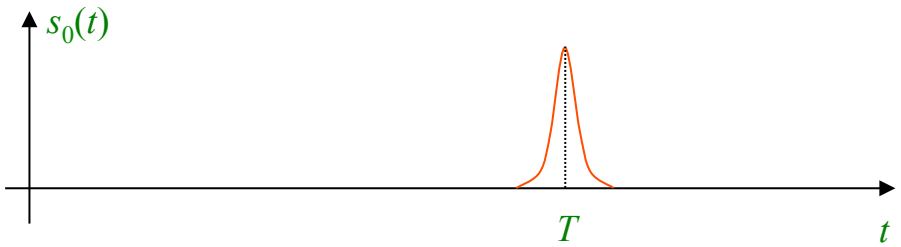


$s(t)$ é transmitido para o receptor via um canal ruidoso sem distorção.

Deseja-se: reconstruir na saída do receptor um sinal que se aproxime o mais fielmente possível de um sinal similar a um impulso.

Solução ótima quando o ruído AWGN está presente $\Rightarrow$ filtro casado!

filtro casado $\Rightarrow$ decodificador, onde a componente útil do sinal $s(t)$ da entrada do receptor é decodificada de modo que todas as componentes em frequência da saída do filtro possuem fase zero em $t = T$, e se adicionam construtivamente para produzir um pulso grande de largura não nula, como abaixo:



Na codificação do sinal similar ao impulso na entrada do transmissor, espalhamos a energia do sinal sobre a duração T.

A extensão com que a saída do receptor $s_0(t)$ se aproxima do sinal similar ao impulso original é simplesmente um reflexo de como a função de autocorrelação do sinal transmitido $s(t)$ se aproxima da função $\delta(t)$.

Filtros de geração e de reconstrução $\Rightarrow$ par de filtros casados

A idéia de um par de filtros casados é básica para uma técnica de comunicação conhecida como modulação por espalhamento espectral (*Spread Spectrum Modulation*).

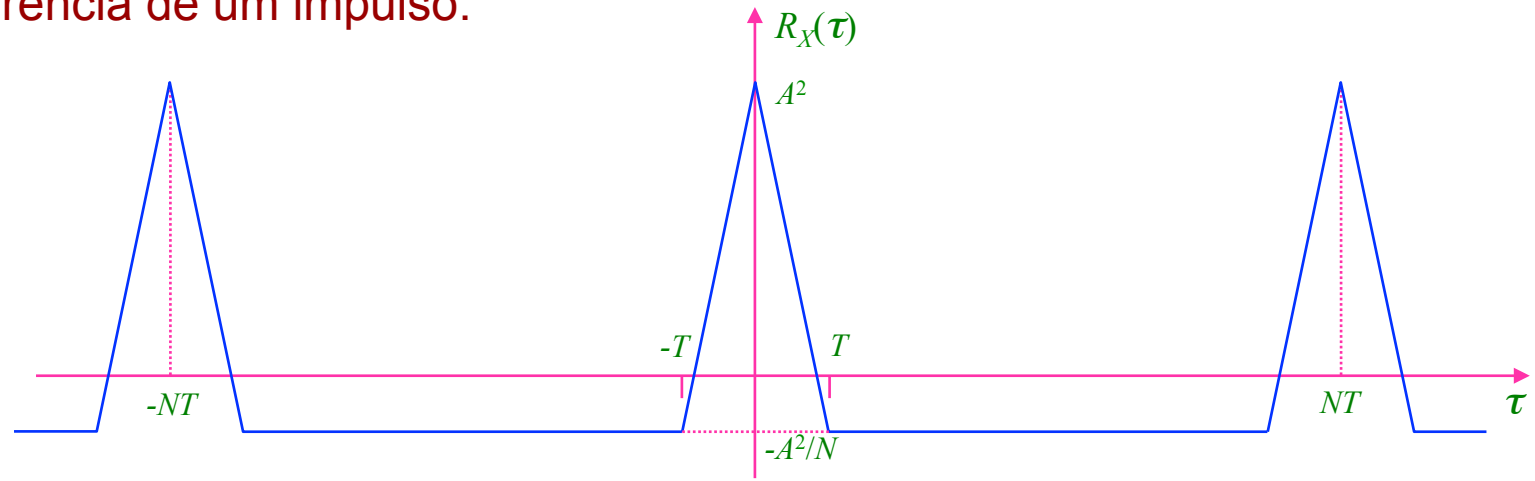
Na modulação por espalhamento espectral, o caráter similar ao ruído do sinal transmitido é produzido tendo uma sequência binária de informação modulando uma sequência de espalhamento que atua como uma portadora.

A sequência de informação é recobrada no receptor por meio de um filtro casado à sequência de espalhamento empregada no transmissor.

Tipo popular de modulação por espalhamento espectral:

- uma sequência de pseudo-ruído (PN) é usada como sequência de espalhamento.
- cada bloco de pulsos que constitui um período de uma sequência PN é multiplicado no transmissor por $+1$ ou -1, dependendo se o símbolo binário da sequência de informação é um 1 ou um 0.

A função de autocorrelação de uma sequência PN (sequência de comprimento máximo) consiste de um trem periódico de pulsos curtos triangulares que tem a aparência de um impulso:



Então, a saída do filtro casado devido a sequência de informação consiste de um trem periódico de pulsos triangulares, com a polaridade de cada pulso sendo determinada pela identidade de um símbolo binário correspondente da sequência de informação.

Por outro lado, um sinal de interferência (*jamming*), não casado com a sequência PN, é rejeitado pelo receptor com filtro casado.

O nível desta rejeição é determinado pela razão T_b/T_c, onde T_b é a duração de um bit da sequência de informação e T_c é a duração de um pulso básico (chip) de uma sequência PN.

ganho de processamento = T_b/T_c [dB].

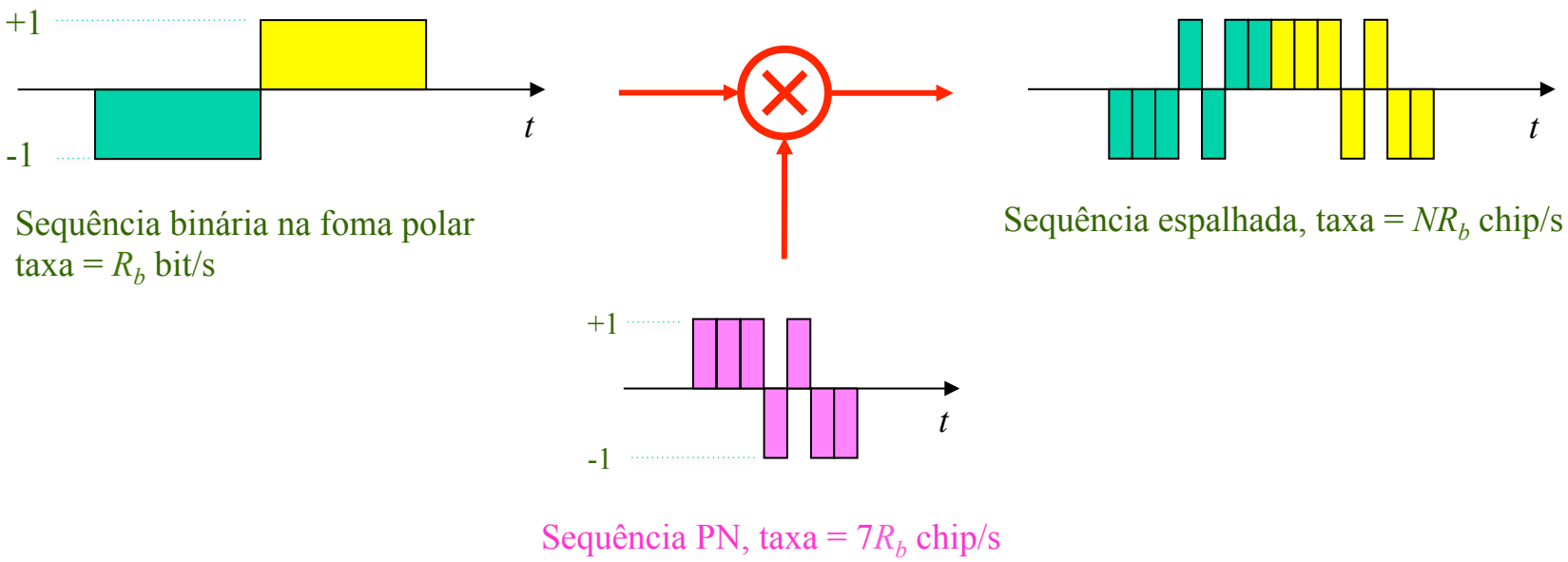
Assim, dando uma valor grande para T_b/T_c (da ordem de 1000), um enlace de comunicação é estabelecido entre o transmissor e o receptor.

Os 1's e 0's da sequência de informação original são detectados pela amostragem da saída do filtro casado a cada T_b segundos:

- se a polaridade de uma amostra sob teste é positiva, a decisão é feita em favor do símbolo 1,
- caso contrário, a decisão é feita em favor do símbolo 0.

Exemplo: Espalhamento espectral utilizando uma sequência PN de comprimento N = 7:

Transmissão:



Sequência PN: +1 +1 +1 –1 +1 –1 –1

- +1 na sequência de bits original será transmitido como a sequência de chips:

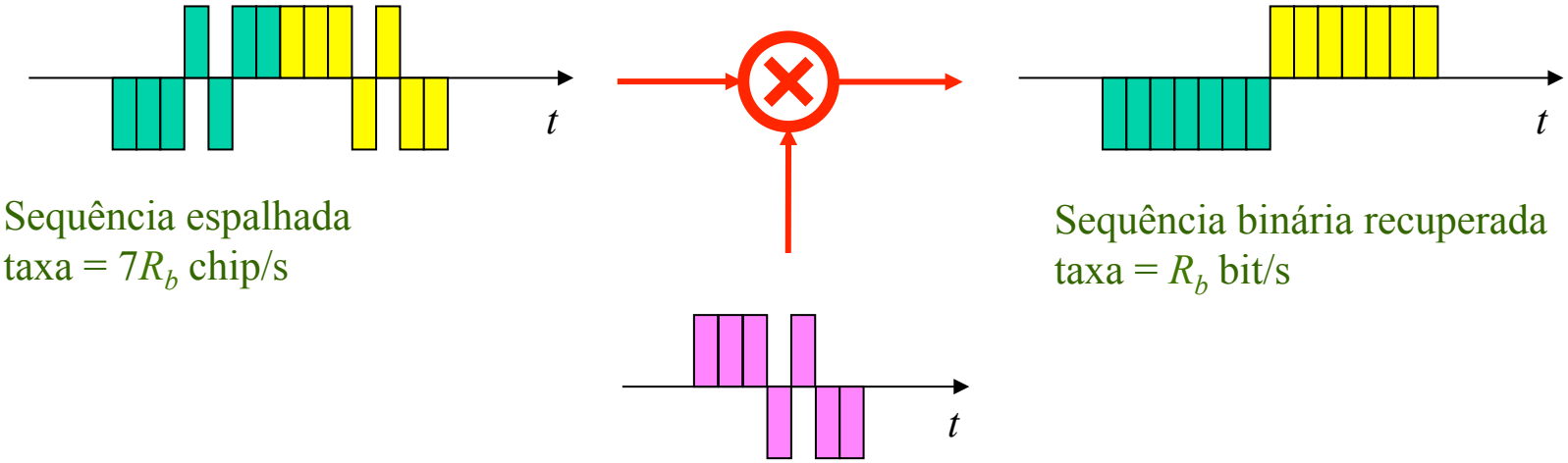
$$+1\ +1\ +1\ -1\ +1\ -1\ -1$$

- –1 na sequência de bits original será transmitido como a sequência de chips:

$$-1\ -1\ -1\ +1\ -1\ +1\ +1$$

ou seja, isto é equivalente a cada bit de informação ser multiplicado por uma sequência PN de período igual a duração de um bit.

Recepção:

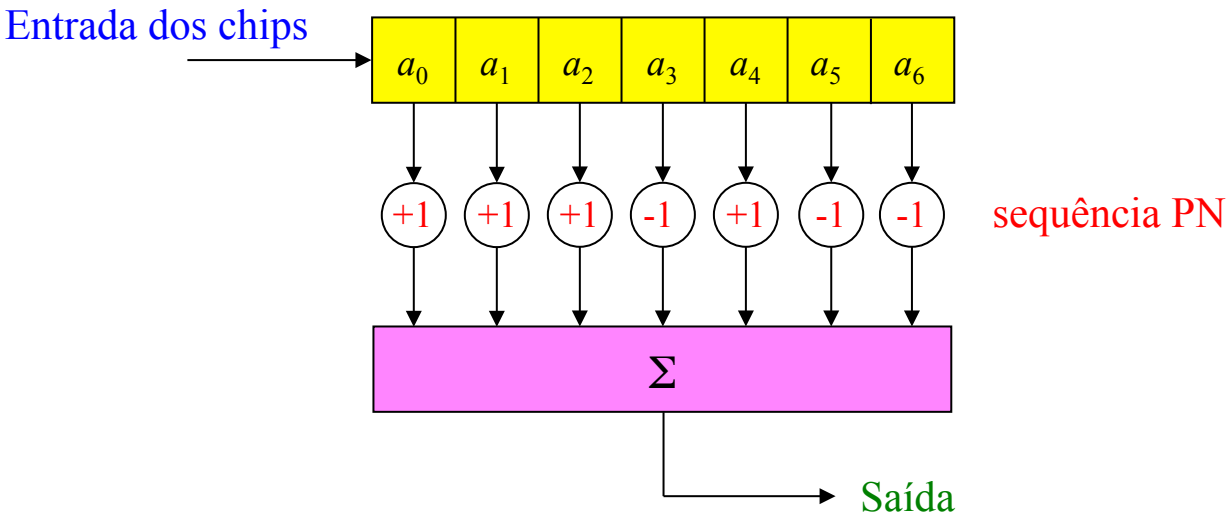


Sequência espalhada
taxa = $7R_b$ chip/s

Sequência binária recuperada
taxa = R_b bit/s

Sequência PN, taxa = $7R_b$ chip/s

Filtro casado (correlador):



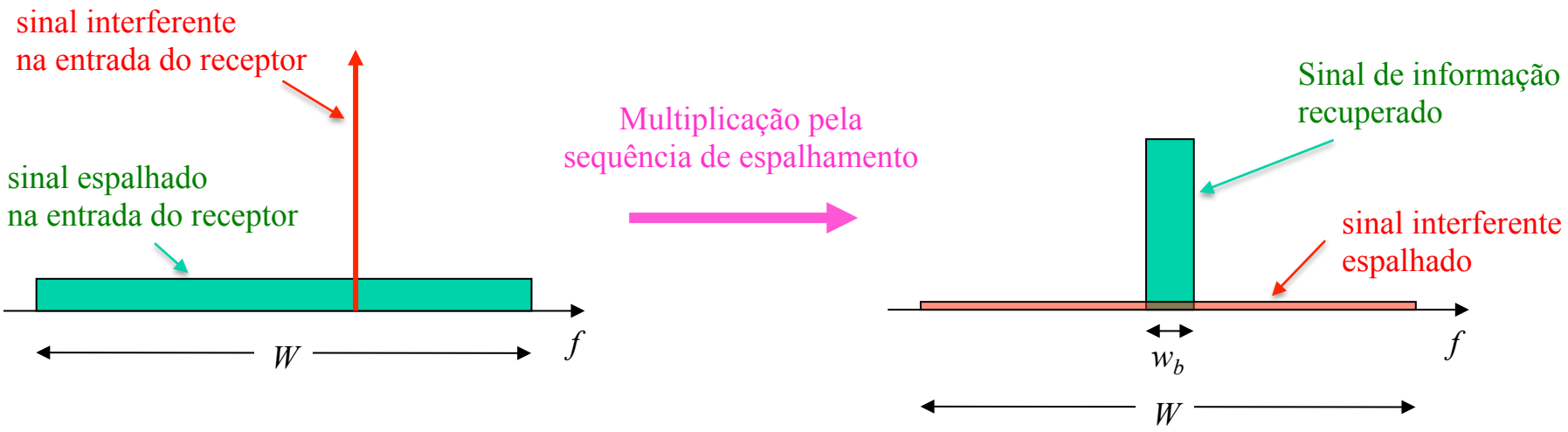
$$v = +1.a_0 + 1.a_1 + 1.a_2 - 1.a_3 + 1.a_4 - 1.a_5 - 1.a_6$$

Note que,

$$(a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6) = (+1\ +1\ +1\ -1\ +1\ -1\ -1) \Rightarrow v = +7$$

$$(a_0\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6) = (-1\ -1\ -1\ +1\ -1\ +1\ +1) \Rightarrow v = -7$$

Minimização da interferência na recepção:



Propriedade 3: A razão sinal/ruído de saída de um filtro casado depende somente da razão da energia do sinal pela densidade espectral de potência do ruído branco na entrada do filtro.

$$\left(SNR\right)_{0,opt} = \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S\left(f\right)\right|^2 df$$

onde $S(f) \Leftrightarrow s(t)$

Do teorema de energia de Rayleigh, a energia do sinal E é dada por:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2\left(t\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left|S\left(f\right)\right|^2 df$$

Então,

$$\boxed{\left(SNR\right)_{0,opt} = \frac{2E}{N_0}}$$

Esta equação mostra que a dependência da forma de onda de entrada $s(t)$ foi completamente eliminada pelo filtro casado.

Na avaliação da habilidade de um filtro casado combater o ruído gaussiano branco, temos que quaisquer sinais que possuam a mesma energia são igualmente eficazes.

Dimensão:	E	$\Rightarrow$	Joule
	$N_0/2$	$\Rightarrow$	Watts/Hertz
	$2E/N_0$	$\Rightarrow$	adimensional

Propriedade 4: A operação de filtragem casada pode ser separada em duas condições de casamento:

- casamento espectral de fase que produz o pico de saída desejado no tempo T.
- casamento espectral de amplitude que maximiza a razão sinal/ruído de saída no tempo T.

Na forma polar, o espectro do sinal $s(t)$ pode ser expresso como:

$$S(f) = |S(f)| \exp[j\theta(f)]$$

onde $|S(f)|$ é o espectro de amplitude e $\theta(f)$ é o espectro de fase.

O filtro é dito casado em espectro de fase ao sinal $s(t)$ se a função de transferência do filtro for definida por:

$$H(f) = |H(f)| \exp\left[-j\theta(f) - j2\pi fT\right]$$

onde $|H(f)|$ é real e não negativa.

A saída deste filtro é dada por:

$$s_0'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S(f) \exp(2\pi ft) df$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)||S(f)| \exp\left[2\pi f(t-T)\right] df$$

Real não negativo

O casamento do espectro de fase garante que todas as componentes da saída do filtro se somarão construtivamente no instante de tempo $t = T$, fazendo com que a saída assuma seu valor máximo.

Portanto, o valor máximo da saída é dado por:

$$s_0'(t) \leq s_0'(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)||S(f)| df$$

Para o casamento do espectro de amplitude, escolhe-se a resposta em amplitude $|H(f)|$ do filtro que maximize a razão sinal-ruído de saída no instante T, utilizando:

$$|H(f)| = |S(f)|$$

Sendo o resultado o filtro casado padrão.

4. Aproximações no projeto do filtro casado

No projeto do filtro casado, temos que levar em consideração dois aspectos importantes:

- se o filtro é realizável fisicamente,
- se o filtro é factível praticamente.

Para um filtro casado operando em tempo real ser fisicamente realizável $\Rightarrow$ resposta ao impulso = 0 para $t < 0$.

Se o sinal $s(t)$ dura de $t = 0$ até T, então para o filtro casado ser realizável basta introduzir um atraso finito igual a T na resposta ao impulso do filtro.

Devemos, portanto, esperar T segundos para que a componente do sinal de saída $s_0(t)$ do filtro casado atinja seu valor de pico $s_0(T)$.

Se, por acaso, o tempo T for muito longo, então, de modo a maximizar a razão sinal/ruído de saída para algum instante de tempo $t = T'$, onde $T' \leq T$, devemos usar parte da resposta ao impulso ótima $h_{opt}(t)$ de $t = 0$ a T'.

A razão sinal/ruído medida em $t = T'$ é dada por:

$$\boxed{\left(SNR\right)_{0,opt} = \frac{2E'}{N_0}}$$

E' = parte da energia do sinal que foi recebida pelo filtro no tempo $t = T'$.

Neste caso, estamos utilizando uma aproximação do filtro casado, onde a precisão da aproximação é determinada pela fração de energia do sinal que é recebida no tempo $t = T'$.

Problema:

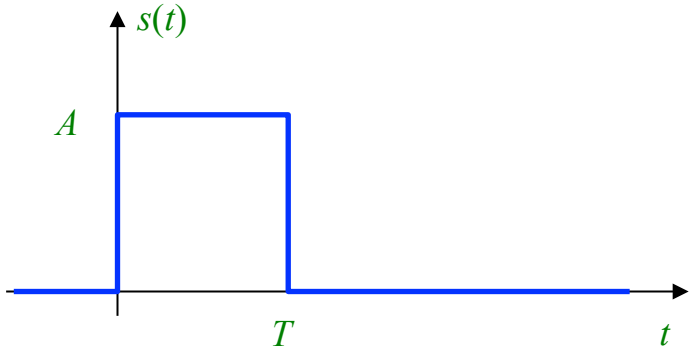
Pode ser difícil construir um filtro com a função de transferência exatamente igual ao complexo conjugado do espectro do sinal de entrada $s(t)$.

Assim, temos que fazer algum tipo de aproximação para tornar a função de transferência $H_{opt}(f)$ realizável.

Esta aproximação resulta em perda de desempenho.

Exemplo: Aproximações para um filtro casado para um pulso retangular de entrada

Pulso retangular:



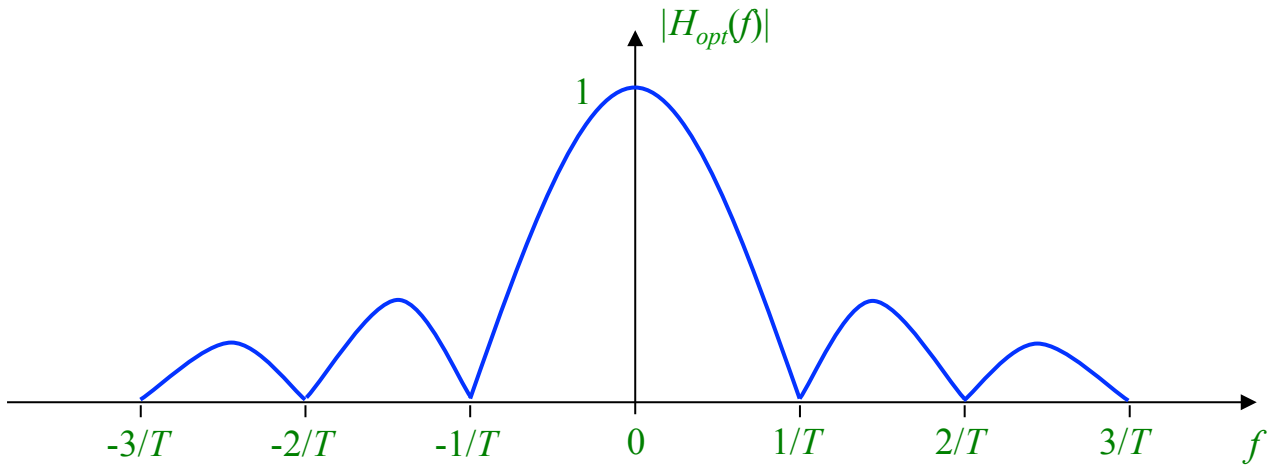
Por conveniência: $AT = 1$.

Estrutura 1: Filtro passa-baixas ideal com largura de faixa variável

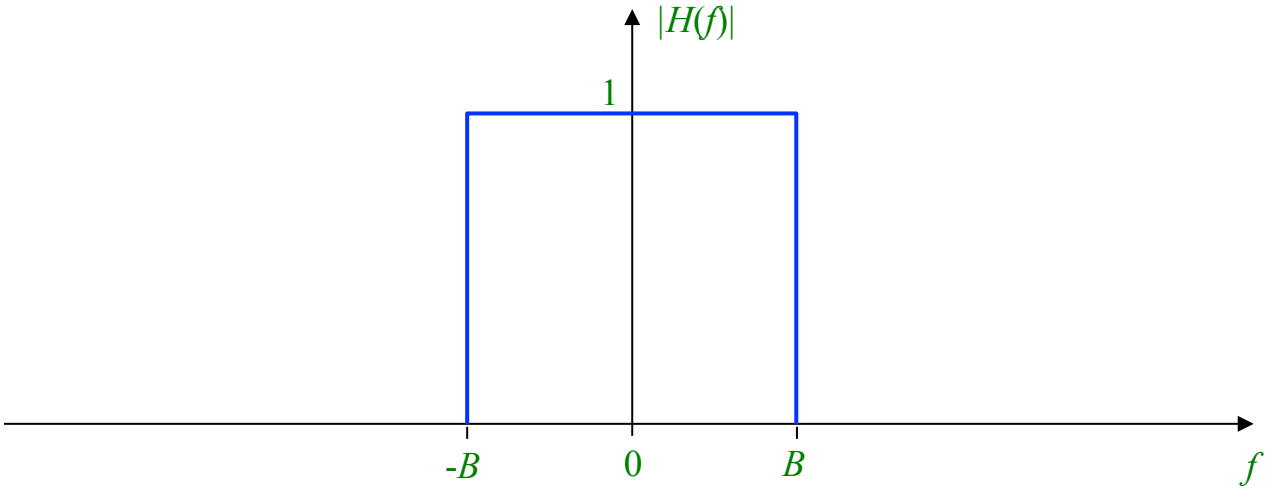
Função de transferência do filtro casado:

$$H_{opt}(f) = \mathrm{sinc}(fT)\exp(-j\pi fT)$$

Resposta em amplitude de $H_{opt}(f)$:



Desejamos aproximar esta resposta em amplitude a um filtro passa-baixas ideal com largura de faixa B, como dado abaixo:



Ou seja, desejamos determinar qual valor de B que fornece a melhor aproximação para o filtro casado.

O valor máximo do sinal de saída, produzido pelo filtro passa-baixas ideal em resposta ao pulso retangular de largura T e amplitude A, ocorre em $t = T/2$ para $BT << 1$.

Valor máximo = $\boxed{\frac{2A}{\pi}\mathrm{Si}(\pi BT)}$

$$\boxed{\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{sen}(\lambda)}{\lambda} d\lambda}$$

Potência média de ruído na saída do filtro passa-baixas ideal = BN_0

Razão sinal/ruído máxima de saída do FPB:

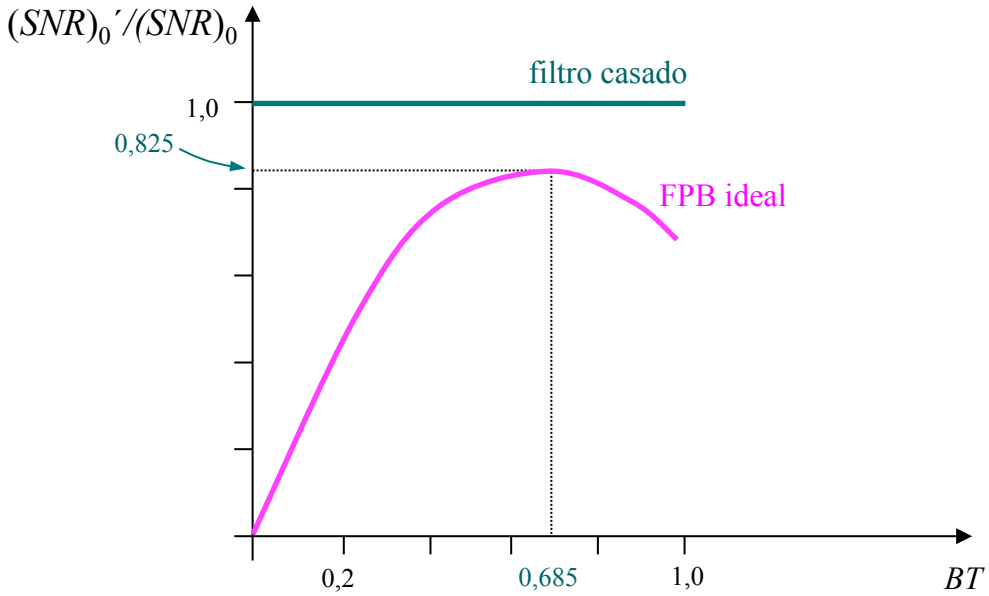
$$(SNR)_0' = \frac{\left(\frac{2A}{\pi}\right)^2 \mathrm{Si}^2(\pi BT)}{BN_0}$$

Razão sinal/ruído de saída de um filtro casado a um pulso retangular de amplitude A e duração T:

$$\boxed{\left(SNR\right)_0 = \frac{2A^2T}{N_0}}$$

Assumindo $AT = 1$, temos:

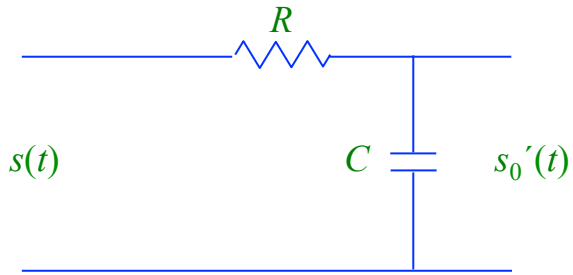
$$\boxed{\frac{\left(SNR\right)_0'}{\left(SNR\right)_0} = \frac{2}{\pi^2 BT}\mathrm{Si}^2\left(\pi BT\right)}$$



Valor de pico ocorre para $BT = 0{,}685$, onde a razão sinal/ruído máxima do filtro passa-baixas ideal está a $0{,}84$ dB abaixo da razão do filtro casado verdadeiro.

Portanto, o melhor valor para a largura de faixa de um FPB ideal é $B = 0{,}685/T$.

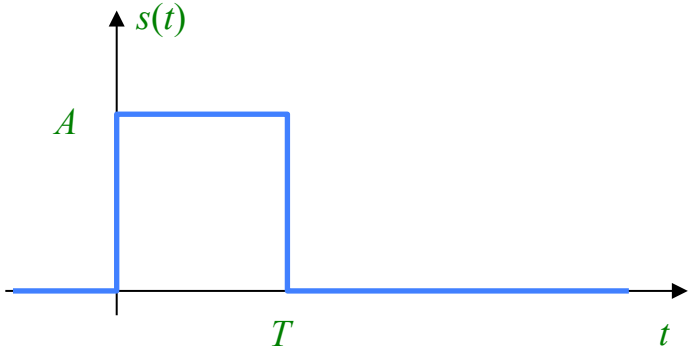
Estrutura 2: Filtro *RC* passa-baixas com largura de faixa variável

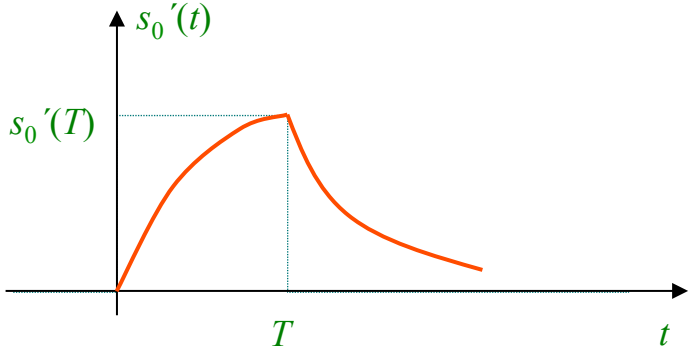


Desejamos encontrar a melhor aproximação do filtro casado para o pulso retangular de amplitude A e duração T.

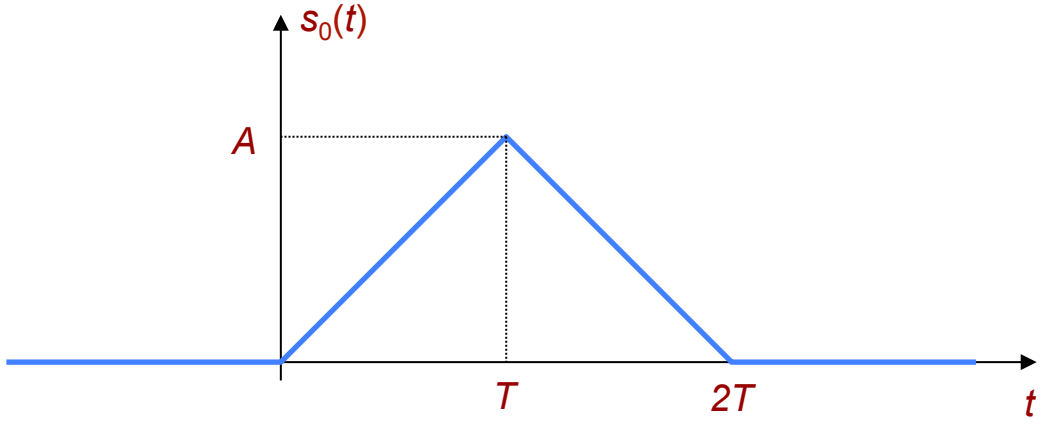
Análise no domínio do tempo (mais fácil):

Resposta do filtro ao pulso retangular:





Resposta do filtro casado ao pulso retangular:



Resposta do filtro RC alcança seu valor de pico no tempo $t = T$ e é dado por:

$$s_0'(T) = A\left[1 - \exp\left(-\frac{T}{RC}\right)\right]$$

A largura de faixa de 3 dB do filtro é dada por: $B = 1/(2\pi RC)$, então,

$$s_0'(T) = A\left[1 - \exp\left(-2\pi BT\right)\right]$$

Ruído branco de média zero e densidade espectral de potência = $N_0/2$.

Função de transferência do filtro:

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC} = \frac{1}{1 + j\dfrac{f}{B}}$$

Potência média do ruído na saída do filtro RC:

$$\eta'_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} \left| H(f) \right|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (f/B)^2} df = \frac{\pi N_0 B}{2}$$

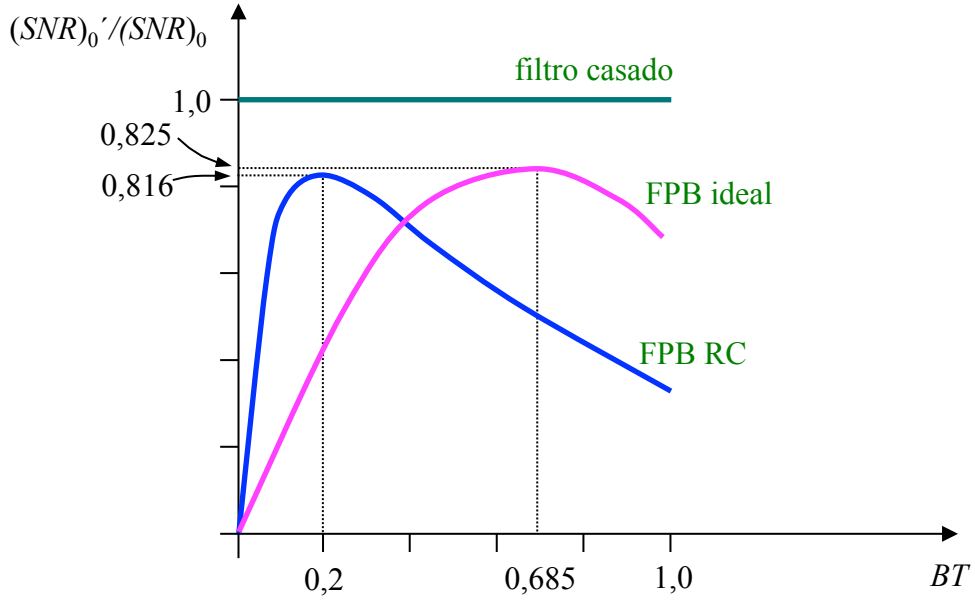
Razão sinal/ruído de saída do filtro RC no tempo $t = T$:

$$(SNR)'_0 = \frac{2A^2}{\pi N_0 B} \left[1 - \exp(-2\pi BT) \right]^2$$

Assim, obtemos:

$$\frac{(SNR)'_0}{(SNR)_0} = \frac{1}{\pi BT} \left[1 - \exp(-2\pi BT) \right]^2$$

onde $(SNR)_0 = \dfrac{2A^2T}{N_0}$



A curva atinge o valor de pico de $0{,}816$ em $BT \approx 0{,}2$. A razão sinal/ruído de saída do filtro RC é $0{,}9$ dB abaixo da do filtro casado real.

Filtro RC é pior que o passa-baixas ideal em apenas 0.06 dB $\Rightarrow$ RC é preferido!!

5. Método Probabilístico

PCM com sinalização *on-off*:

símbolo 1 = presença de $s(t)$

símbolo 0 = ausência de $s(t)$

A presença de ruído na entrada do receptor causa dois tipos de erro:

1. Um erro que ocorre quando o símbolo 0 é transmitido e o receptor decide pelo símbolo 1.
2. Um erro que ocorre quando o símbolo 1 é transmitido e o receptor decide pelo símbolo 0.

Desejamos minimizar a probabilidade de erro média envolvendo estes dois tipos de erros $\Rightarrow$ procedimento de teste de hipóteses.

Razão de Verossimilhança (Likelihood Ratio):

Teste de hipóteses sobre o sinal recebido $x(t)$:

Hipótese nula: $H_0: x(t) = w(t)$ (sinal ausente)

Hipótese alternativa: $H_1: x(t) = s(t) + w(t)$ (sinal presente)

Problema: Observar o sinal recebido $x(t)$ durante o intervalo de 0 a T segundos e decidir qual das hipóteses acima é verdadeira.

Para ter uma descrição probabilística do sinal contínuo $x(t)$, assumimos que m amostras (amplitudes) de $x(t)$ estão disponíveis e em seguida fazemos $m \rightarrow \infty$.

No instante de tempo t_k temos:

$$H_0: x_k = w_k$$

$$H_1: x_k = s_k + w_k$$

onde x_k, s_k e w_k referem-se aos valores das amostras de $x(t)$, $s(t)$ e $w(t)$ no instante t_k, respectivamente. ($k = 1, 2, \ldots, m$)

Definição: Vetor de observação $\mathbf{x}$ m-por-1 que consiste dos valores das amostras $x_1, x_2, \ldots, x_m$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ = uma única realização do sinal observado (medido) na entrada do receptor.

Seja o vetor aleatório $\mathbf{X}$ o ensemble de todas as realizações.

$\mathbf{X}$ é aleatório devido ao ruído gaussiano branco aditivo presente na entrada do receptor.

Seja $f_0(\mathbf{x})$ a função densidade de probabilidade condicional do vetor aleatório $\mathbf{X}$ dado que H_0 é verdadeira.

Seja $f_1(\mathbf{x})$ a função densidade de probabilidade condicional do vetor aleatório $\mathbf{X}$ dado que H_1 é verdadeira.

No problema de teste de hipótese binário, sabemos que H_0 ou H_1 é verdadeiro.

Assim, assumindo que uma escolha deve ser feita cada vez que o experimento é realizado, apenas uma das quatro possibilidades podem ocorrer:

1. H_0 é verdadeira; escolhe-se H_0 (escolha correta)
2. H_0 é verdadeira; escolhe-se H_1 (escolha incorreta)
3. H_1 é verdadeira; escolhe-se H_1 (escolha correta)
4. H_1 é verdadeira; escolhe-se H_0 (escolha incorreta)

Para implementar a regra de decisão dividimos o espaço de observação Z em duas partes Z_0 e Z_1.

Quando uma observação cai em Z_0 escolhemos H_0 e quando a observação cai em Z_1 escolhemos H_1.

Probabilidades importantes:

1. Probabilidade condicional de recepção correta:

$$\int_{Z_i} f_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \qquad i = 0, 1$$

onde a região de decisão Z_i m-dimensional corresponde a hipótese H_i.

2. Probabilidade condicional de erro:

$$\int_{\overline{Z}_i} f_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \qquad i = 0, 1$$

onde $\overline{Z}_i$ é a região de decisão complementar de Z_i , isto é,

$$\overline{Z} = \begin{cases} Z_1 & i = 0 \\ Z_0 & i = 1 \end{cases}$$

Em sistemas de comunicações digitais $\Rightarrow$ minimizar a probabilidade média de erro.

Seja p e q as probabilidades a priori das hipóteses H_0 e H_1, respectivamente.

p e q representam a informação do observador sobre a fonte que gera o vetor observação $\mathbf{x}$ antes do experimento ser realizado.

Então, a probabilidade média de erro é dada por:

$$P_e = p\int_{Z_1} f_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + q\int_{Z_0} f_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

Como o espaço total de observação $Z = Z_0 + Z_1$, temos:

$$P_e = p\int_{Z-Z_0} f_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + q\int_{Z_0} f_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

Note, entretanto, que a probabilidade de uma observação cair no espaço total de observação Z é igual a 1, isto é, $\int_Z f_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 1$. Então,

$$P_e = p - p\int_{Z_0} f_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + q\int_{Z_0} f_1(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

$$= p + \int_{Z_0}\left[qf_1(\mathbf{x}) - pf_0(\mathbf{x})\right]d\mathbf{x}$$

Portanto,

$$\boxed{P_e = p + \int_{Z_0} \left[q f_1(\mathbf{x}) - p f_0(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{x}}$$

Todos os valores de $\mathbf{x}$ para os quais $p f_0(\mathbf{x}) > q f_1(\mathbf{x})$ devem ser associados a Z_0 pois eles contribuem com uma quantidade negativa na integral.

Todos os valores de $\mathbf{x}$ para os quais $p f_0(\mathbf{x}) < q f_1(\mathbf{x})$ devem ser associados a Z_1 pois eles contribuem com uma quantidade positiva na integral.

Valores de $\mathbf{x}$ onde $p f_0(\mathbf{x}) = q f_1(\mathbf{x})$ não afetam a probabilidade média de erro P_e e podem ser associados a qualquer um dos espaços.

Assim, definimos a região de decisão como:

- Se $qf_1(\mathbf{x}) > pf_0(\mathbf{x})$ associamos $\mathbf{x}$ a Z_1 e escolhemos a hipótese H_1.
- Caso contrário, associamos $\mathbf{x}$ a Z_0 e escolhemos a hipótese H_0.

Ou equivalentemente,

$$\boxed{\frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p}{q}}$$

A razão de verossimilhança (*likelihood ratio*) é definida por:

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{f_1(\mathbf{x})}{f_0(\mathbf{x})}$$

A razão de verossimilhança é uma razão entre duas funções que são variáveis aleatórias, portanto ela também é uma variável aleatória, só que unidimensional.

Assim temos:

$$\Lambda(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p}{q}$$

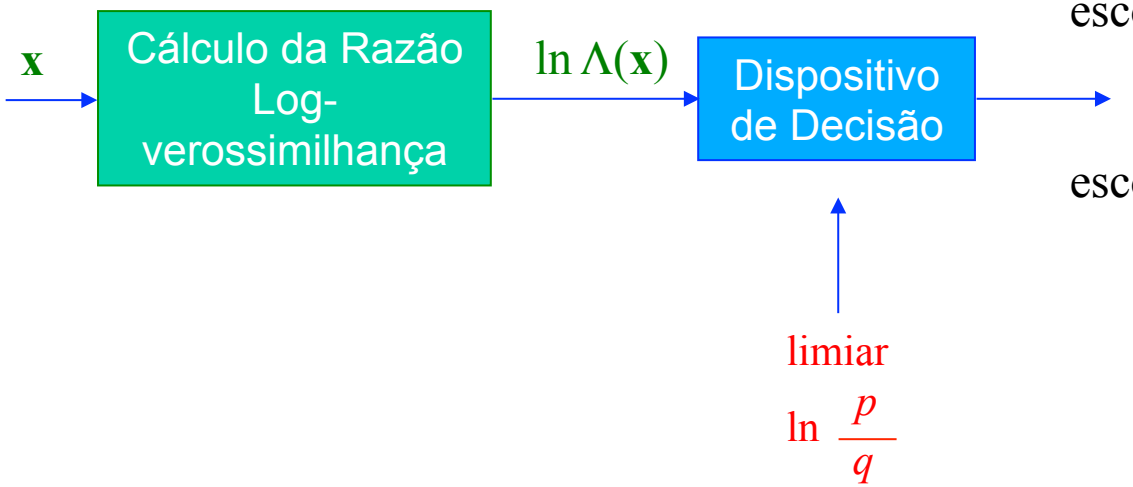
Este teste é denominado de critério de mínima probabilidade de erro.

Forma equivalente de comparação: razão log-verossimilhança (*log-likelihood ratio*):

$$\ln \Lambda(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \frac{p}{q}$$

Quando H_0 e H_1 são equiprováveis ($p = q$) o limiar de decisão contra o qual a razão de log-verossimilhança é comparada é o zero.

Receptor ótimo de razão de log-verossimilhança:



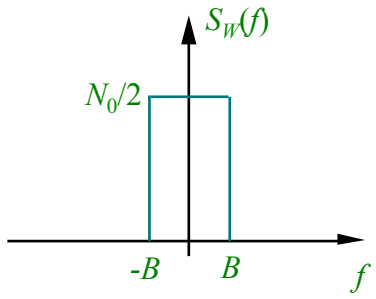
$$\text{escolhe-se } H_1 \text{ se } \ln\left[\Lambda(\mathbf{x})\right] > \ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\text{escolhe-se } H_0 \text{ se } \ln\left[\Lambda(\mathbf{x})\right] < \ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

Receptor de Correlação:

Vamos assumir momentaneamente que o ruído é gaussiano branco aditivo (AWGN) limitado em faixa com densidade espectral de potência:

$$S_W(f) = \begin{cases} \dfrac{N_0}{2} & |f| < B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$$



Se o sinal $x(t)$ contendo este ruído é amostrado a cada $T_s = 1/2B$, as amostras são incorrelatas (descorrelacionadas) e como são gaussianas, elas também são estatisticamente independentes.

No intervalo de 0 a T, coletamos um total de $m = T/T_s = 2BT$ amostras estatisticamente independentes.

As funções densidade de probabilidade conjunta $f_0(\mathbf{x})$ e $f_1(\mathbf{x})$ são, portanto, os produtos das funções densidade de probabilidade das componentes individuais de um vetor aleatório $\mathbf{X}$, assumindo que H_0 e H_1 são verdadeiras, respectivamente.

Para escrever $f_0(\mathbf{x})$ e $f_1(\mathbf{x})$ temos que ter a média e a variância das variáveis aleatórias X_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, que constituem o vetor $\mathbf{X}$.

Como o ruído $w(t)$ possui média zero, temos:

$$H_0 : \text{média de } X_k = 0$$

$$H_1 : \text{média de } X_k = s_k$$

onde s_k é o valor do sinal $s(t)$ no tempo t_k.

A variância de X_k é a mesma sob ambas hipóteses H_0 e H_1,

$$\sigma^2\left(X_k\right) = \sigma^2\left(W_k\right) = \sigma^2$$

onde W_k é a variável aleatória obtida pela observação do processo ruidoso branco $w(t)$ limitado em faixa no instante t_k.

A variância é portanto aquela relativa a componente de ruído:

$$\boxed{\sigma^2 = N_0 B = \frac{N_0}{2T_s}}$$

A variância é igual a potência média de ruído (área sob a curva da densidade espectral de potência do ruído).

A função densidade de probabilidade condicional $f_0(\mathbf{x})$ é dada por:

$$f_0(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{m} f_0(x_k)$$

onde $f_0(x_k)$ é gaussiana:

$$f_0(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x_k^2}{2\sigma^2}\right)$$

Então, temos:

$$\boxed{f_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{m/2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \frac{x_k^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Similarmente, obtemos:

$$\boxed{f_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left(2\pi\sigma^2\right)^{m/2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^{m} \frac{\left(x_k - s_k\right)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

Substituindo as duas equações anteriores na expressão da razão log-verossimilhança:

$$\ln \Lambda(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln \frac{p}{q}$$

obtemos

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\sigma^2}\left(2 s_k x_k - s_k^2\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

ou de modo equivalente,

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{s_k x_k}{\sigma^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} \frac{s_k^2}{\sigma^2}$$

Sabemos que $\sigma^2 = N_0 B = N_0/2T_s$, então,

$$\frac{2}{N_0}\sum_{k=1}^{m}\left(s_k x_k T_s\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{m} s_k^2 T_s$$

A regra de decisão acima é expressa em termos de m amostras uniformemente espaçadas do sinal $x(t)$ recebido e de um sinal $s(t)$ conhecido.

Para se obter uma regra de decisão correspondente em termos das funções contínuas $x(t)$ e $s(t)$, fazemos $T_s \rightarrow 0$ e m (e portanto B) $\rightarrow \infty$ de tal modo que o intervalo de observação mT_s permanece uma constante T. No limite as somatórias se tornam integrais e temos:

$$\frac{2}{N_0}\int_0^T s(t)x(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \ln\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{1}{N_0}\int_o^T s^2(t)dt$$

Equivalentemente,

$$\boxed{\int_0^T s(t)x(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda}$$

onde

$$\lambda = \frac{N_0}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right)+\frac{1}{2}\int_o^T s^2(t)dt$$

Note que a energia do sinal $s(t)$ é $\boxed{E = \int_0^T s^2(t)dt}$

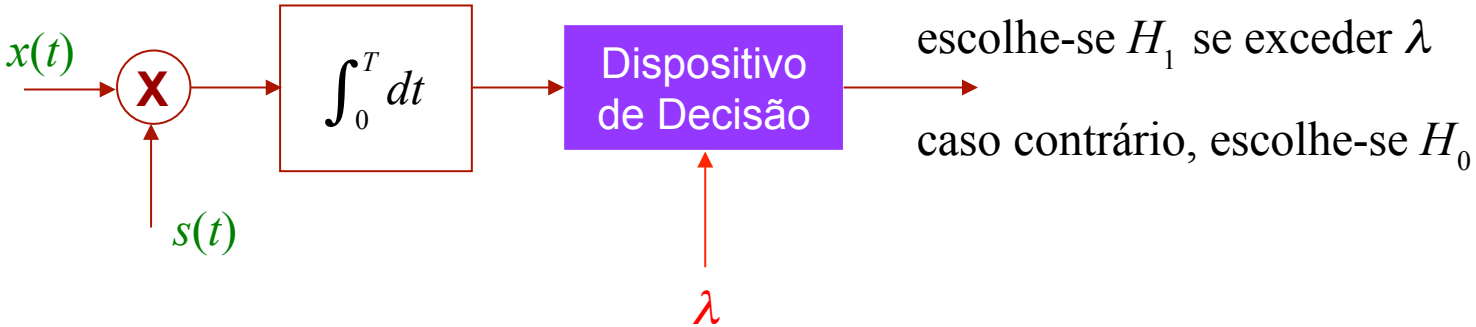
Assim, o limiar λ depende das probabilidades *a priori* p e q, da densidade espectral de ruído N_0 e da energia do sinal E.

Considerações de Implementação

A regra de decisão: $\int_0^T s(t)x(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$

$$\lambda = \frac{N_0}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{1}{2}\int_o^T s^2(t)dt$$

pode ser implementada pelo receptor de correlação:



Este receptor faz a correlação do sinal recebido $x(t)$ com uma réplica do sinal conhecido $s(t)$.

Se a saída do correlador é maior que um limiar pré-determinado λ, escolhemos H_1, caso contrário escolhemos H_0.

Substituindo a diferença $T-\tau$ por t no lado esquerdo da expressão:

$$\int_0^T s(t)x(t)dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda$$

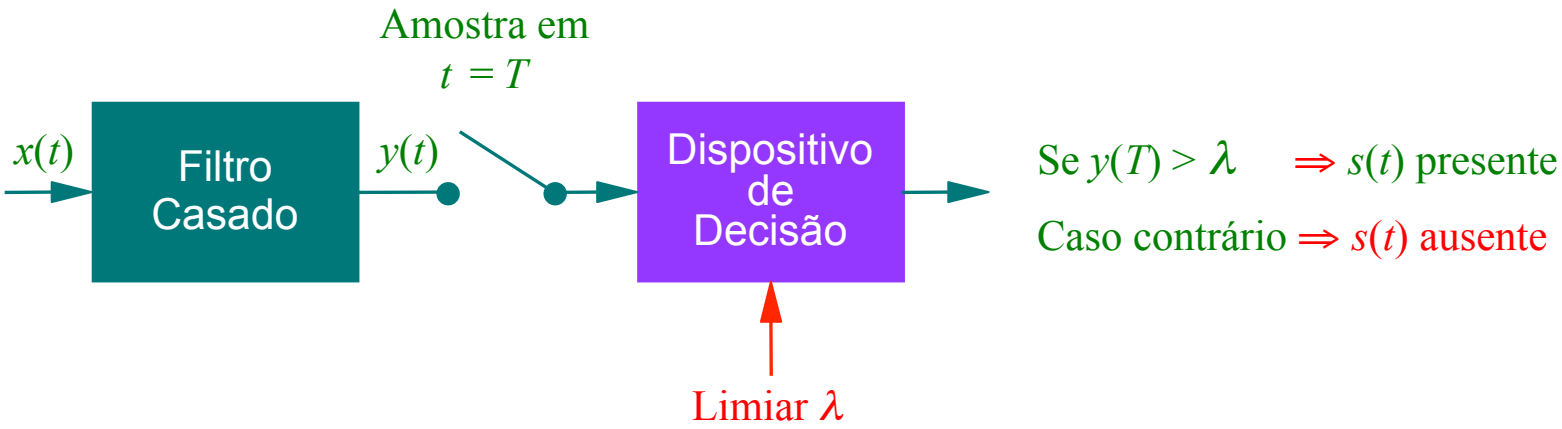
temos: $\int_0^T s(t)x(t)dt = -\int_T^0 s(T-\tau)x(T-\tau)d\tau = \int_0^T s(T-\tau)x(T-\tau)d\tau$

Mas, note que $s(T-\tau)$ é a resposta ao impulso $h_{opt}(t)$ de um filtro linear invariante no tempo casado a um sinal conhecido $s(t)$. Portanto,

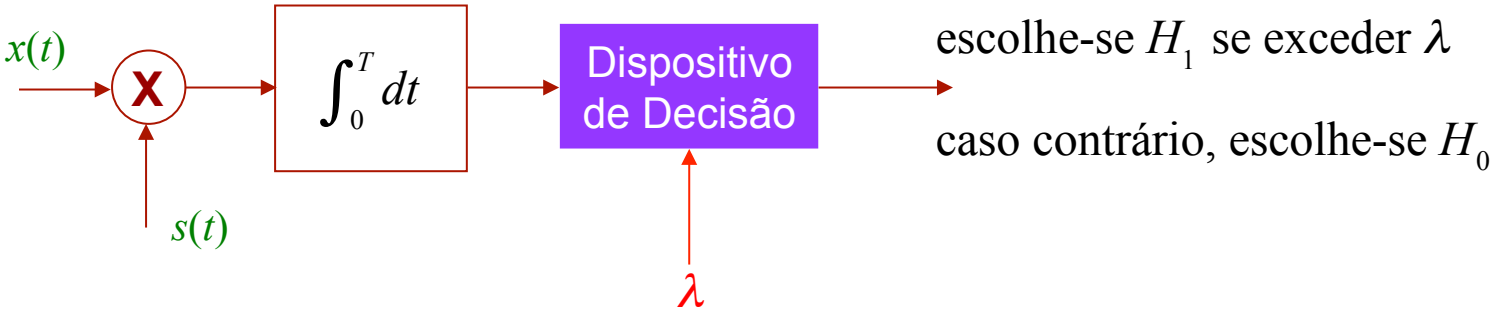
$$\int_0^T s(t)x(t)dt = \int_0^T h_{opt}(\tau)x(T-\tau)d\tau$$

O termo do lado direito é a saída de um filtro casado com resposta ao impulso $h_{opt}(t)$ devido a uma entrada $x(t)$ no tempo T.

Assim, o filtro casado:



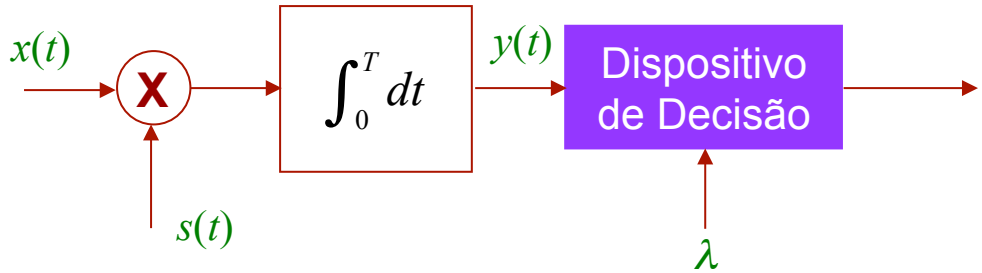
e o receptor de correlação:



são equivalentes. Note, entretanto, que a saída do correlador e a saída do filtro casado são equivalentes somente no tempo T.

6. Probabilidade de Erro para o PCM binário

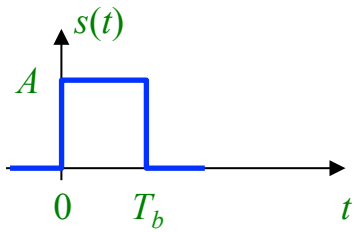
Sinal PCM transmitido por um canal ruidoso. Receptor:



escolhe-se H_1 se exceder λ

caso contrário, escolhe-se H_0

Condições:



1. Modulação on-off: símbolo 1 $\Rightarrow$ A Volts

   símbolo 0 $\Rightarrow$ 0 Volts

2. Os símbolos 0 e 1 são equiprováveis ($p = q$).

3. O ruído de canal $w(t)$ é gaussiano branco com média zero e densidade espectral de potência igual a $N_0/2$.

1ª Condição:

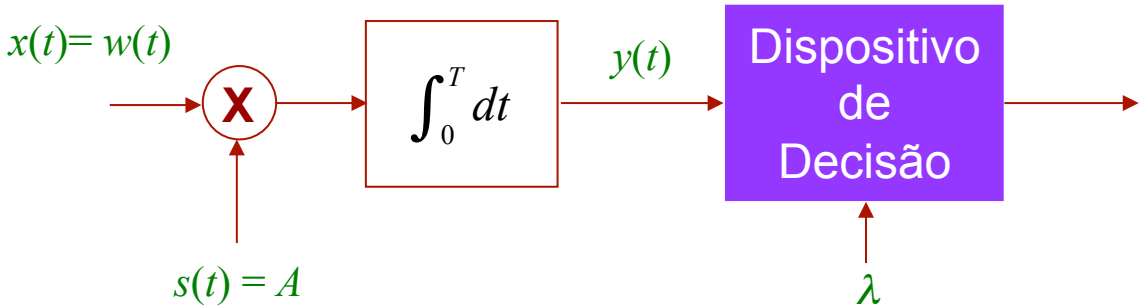
Consideramos o erro que ocorre quando o símbolo 0 é enviado e o receptor escolhe o símbolo 1.

Neste caso, a probabilidade de erro é igual a probabilidade da saída do correlador exceder o limiar λ devido a presença do ruído, quando o símbolo 0 foi transmitido.

$$\lambda = \frac{N_0}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right) + \frac{1}{2}\int_0^{T_b} s^2(t)\,dt = 0 + \frac{A^2 T_b}{2} = \frac{A^2 T_b}{2}$$

T_b é a duração de um bit .

$A^2 T_b$ é a energia do sinal consumida na transmissão do símbolo 1.



Saída do correlador:

$$y = \int_0^{T_b} s(t)\,x(t)\,dt$$

Sob a hipótese H_0, correspondente a transmissão do símbolo 0, $x(t) = w(t)$ e a saída do correlador é:

$$H_0: \qquad y = A\int_0^{T_b} w(t)\,dt$$

O ruído possui média = $0 \Rightarrow$ a saída do correlador também possui média = 0, neste caso podemos definir a média condicional como sendo:

$$m_0 = E\left[Y \middle| H_0\right] = E\left[A\int_0^{T_b} W(t)\,dt\right] = A\int_0^{T_b} \underbrace{E\left[W(t)\right]}_{=0} dt = 0$$

Y = variável aleatória na saída do correlador com y como valor de uma amostra.

$W(t)$ = processo ruidoso branco com $w(t)$ como sua função amostra.

A variância condicional da saída do correlador dado que a hipótese H_0 é verdadeira é definida por:

$$\sigma_0^2 = E\left[Y^2 \middle| H_0\right] = E\left[A^2 \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} W(t_1)W(t_2)\,dt_1\,dt_2\right]$$

Reordenando:

$$\sigma_0^2 = E\left[Y^2 \middle| H_0\right] = A^2 \int_0^{T_b}\int_0^{T_b} \underbrace{E\left[W(t_1)W(t_2)\right]}_{R_W(t_1-t_2)} dt_1\,dt_2$$

Então,

$$\sigma_0^2 = A^2 \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} R_W\left(t_1 - t_2\right) dt_1\, dt_2$$

$R_W(t_1 - t_2)$: função de autocorrelação de ensemble do processo ruidoso branco $W(t)$.

Densidade espectral de potência de $W(t)$:

$$S_W(f) = N_0/2.$$

Então, a função de autocorrelação é dada por:

$$R_W\left(t_1 - t_2\right) = \frac{N_0}{2}\delta\left(\tau - t_1 + t_2\right)$$

Assim,

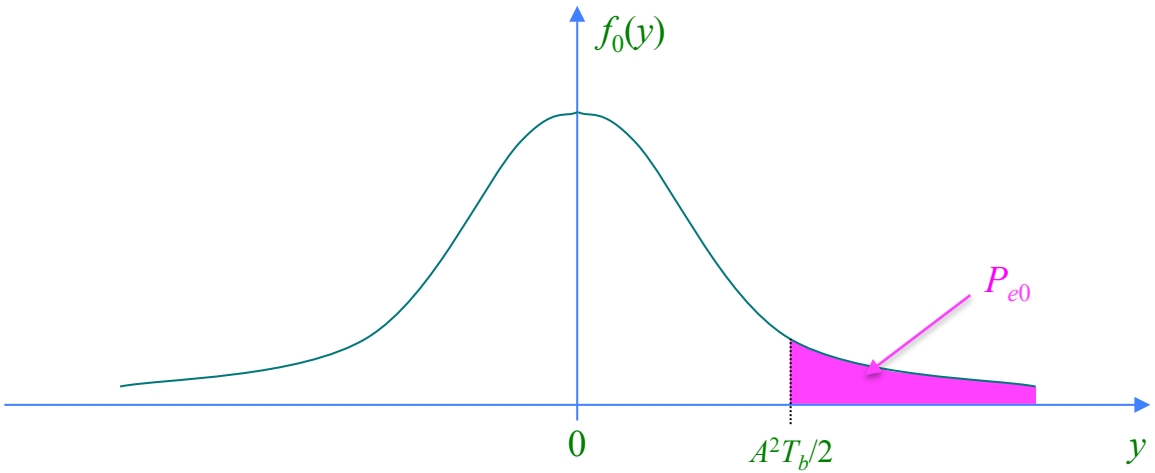
$$\sigma_0^2 = A^2 \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} R_W\left(t_1 - t_2\right) dt_1\, dt_2 = \frac{A^2 N_0}{2} \int_0^{T_b} \int_0^{T_b} \delta\left(\tau - t_1 + t_2\right) dt_1\, dt_2 = \boxed{\frac{N_0 T_b A^2}{2}}$$

Obs.: A saída do correlador possui distribuição gaussiana, pois a sua entrada é um ruído gaussiano branco.

Portanto, sob a hipótese H_0 a saída do correlador é uma variável aleatória gaussiana com média zero e variância $N_0 A^2 T_b/2$, com função densidade de probabilidade condicionada a H_0 dada por:

$$f_0(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 T_b} A} \exp\left(-\frac{y^2}{N_0 T_b A^2}\right)$$

A probabilidade do receptor decidir pelo símbolo 1 é dada pela área sombreada na figura abaixo. Esta área corresponde a saída y do correlador estar acima do limiar $\lambda = A^2T_b/2$.



Probabilidade de erro condicional dado que o símbolo 0 foi enviado:

$$P_{e0} = \int_{\lambda}^{\infty} f_0(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 T_b}\,A}\int_{A^2T_b/2}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{N_0 T_b A^2}\right)dy$$

Fazendo uma mudança de variável:

$$z = \frac{y}{\sqrt{N_0 T_b} A}$$

temos:

$$\boxed{P_{e0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{A^2 T_b / 4 N_0}}^{\infty} \exp\left(-z^2\right) dz}$$

Esta equação só pode ser calculada por métodos numéricos ⇒ função erro complementar (tabulada):

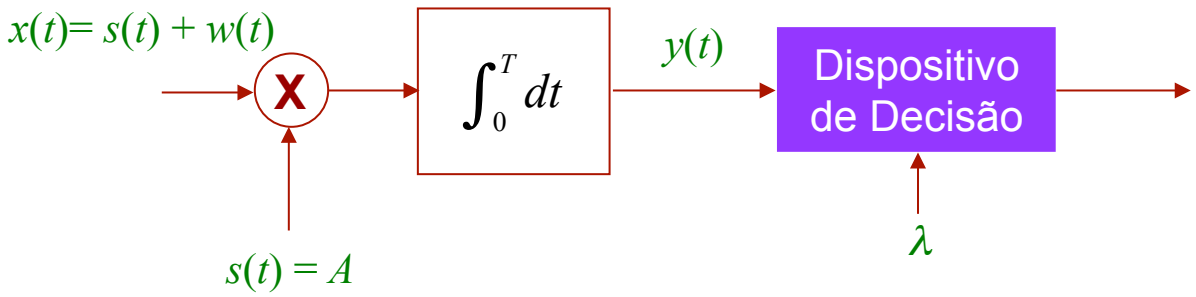
$$\boxed{\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u}^{\infty} \exp\left(-z^2\right) dz}$$

Assim, temos:

$$\boxed{P_{e0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2 T_b}{4 N_0}}\right)}$$

2ª Condição:

Considere que o símbolo 1 foi transmitido e que o receptor decidiu por 0, ou seja, condicionado a hipótese H_1, a entrada do correlador consiste de um pulso retangular de amplitude A e duração T_b mais ruído de canal $w(t)$.



$$H_1: \qquad y = A\int_0^{T_b}\left[A + w(t)\right]dt$$

A saída do correlador neste caso possui média condicional como sendo:

$$m_1 = E\left[Y \middle| H_1\right] = E\left[A\int_0^{T_b}\left[A + W(t)\right]dt\right] = A^2T_b + A\int_0^{T_b}\underbrace{E\left[W(t)\right]}_{=0}dt = \boxed{A^2T_b}$$

Y = variável aleatória na saída do correlador com y como valor de uma amostra.

$W(t)$ = processo ruidoso branco com $w(t)$ como sua função amostra.

Entretanto, a variância condicional da saída do correlador sob a hipótese H_1 é idêntica a da hipótese H_0, isto é, igual a.

$$\boxed{\sigma_1^2 = \frac{N_0T_bA^2}{2}}$$

Além disso, a saída do correlador possui distribuição gaussiana.

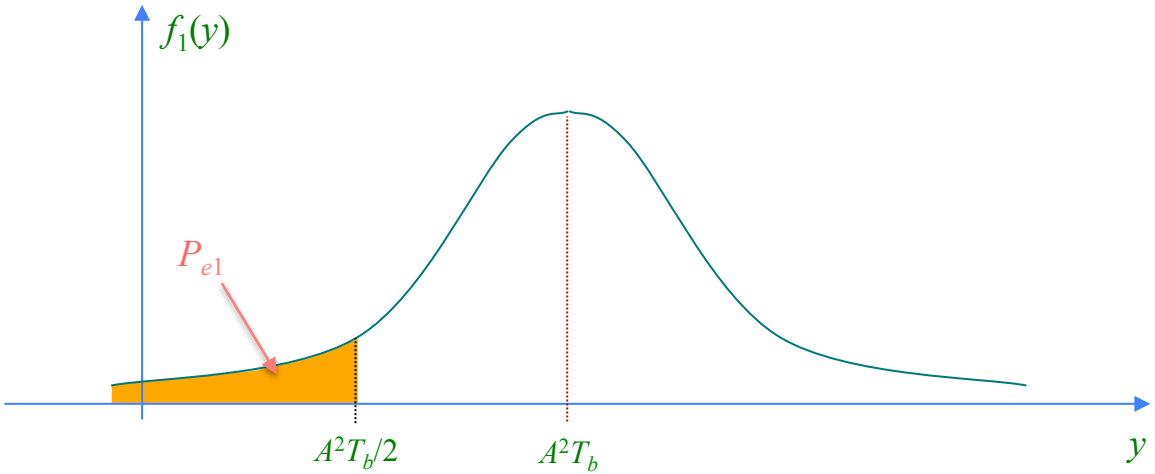
Portanto, sob a hipótese H_1 a saída do correlador é uma variável aleatória gaussiana com média igual a A^2T_b e variância $N_0A^2T_b/2$, com função densidade de probabilidade condicionada a H_1 dada por:

$$\boxed{f_1(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 T_b}\,A} \exp\left(-\frac{\left(y - A^2T_b\right)^2}{N_0T_bA^2}\right)}$$

Probabilidade de erro condicional dado que o símbolo 1 foi enviado:

$$P_{e1} = \int_{-\infty}^{\lambda} f_1(y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 T_b}\,A} \int_{-\infty}^{A^2T_b/2} \exp\left(-\frac{\left(y - A^2T_b\right)^2}{N_0T_bA^2}\right) dy$$

Esta probabilidade corresponde a área sombreada na figura abaixo para um limiar fixado em $\lambda = A^2T_b/2$.



Mas note que a probabilidade de erro condicional dado que o símbolo 1 foi transmitido é equivalente a calcular P_{e0} , logo:

$$P_{e1} = P_{e0} = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2T_b}{4N_0}}\right)$$

Probabilidade de erro média (P_e):

$$P_e = pP_{e0} + qP_{e1}$$

p = probabilidade *a priori* de transmitir 0

q = probabilidade *a priori* de transmitir 1

Como $P_{e0} = P_{e1}$ e $p + q = 1$, temos:

$$P_e = pP_{e0} + qP_{e0} = (p+q)P_{e0} = P_{e0} = P_{e1}$$

ou seja:

$$P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2T_b}{4N_0}}\right)$$

Energia do sinal quando um 1 é transmitido = A^2T_b

Razão da energia do sinal pela densidade espectral de potência quando um 1 é enviado:

$$\eta_1 = \frac{E}{N_0} = \frac{A^2 T_b}{N_0}$$

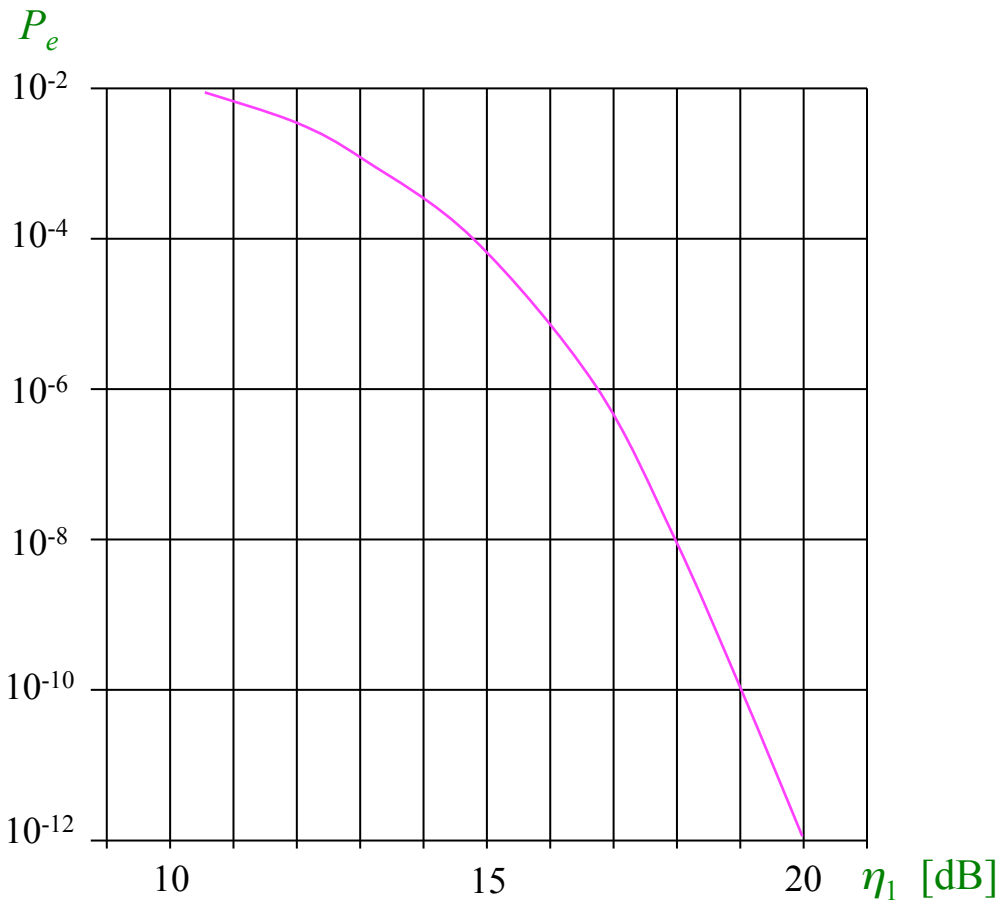
A^2 = potência de pico do sinal.

N_0/T_b = potência média de ruído na largura de faixa igual a taxa de bit $1/T_b$.

Assim, η_1 é a razão entre a potência de pico do sinal pela potência média de ruído medida na largura de faixa igual a $1/T_b$.

Então, a probabilidade de erro média de um sistema PCM binário ótimo usando sinalização on-off é dada por:

$$P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\eta_1}\right)$$



Note que quando $\eta_1 \uparrow \Rightarrow P_e \downarrow$ rapidamente.

7. Técnicas de Modulação Digital

Modulação digital é utilizada para transmitir dados binários por um canal de comunicação passa-faixa com limites de frequência fixos.

geração de ondas moduladas digitais = geração de ondas moduladas analógicas

Técnicas de modulação binária:

Processo de modulação consiste do chaveamento da amplitude, da frequência ou da fase de uma portadora entre dois possíveis valores correspondentes ao 0 e ao 1.

Técnicas básicas de sinalização: ASK (*amplitude-shift keying*), FSK (*frequency-shift keying*) e PSK (*phase shift keying*).

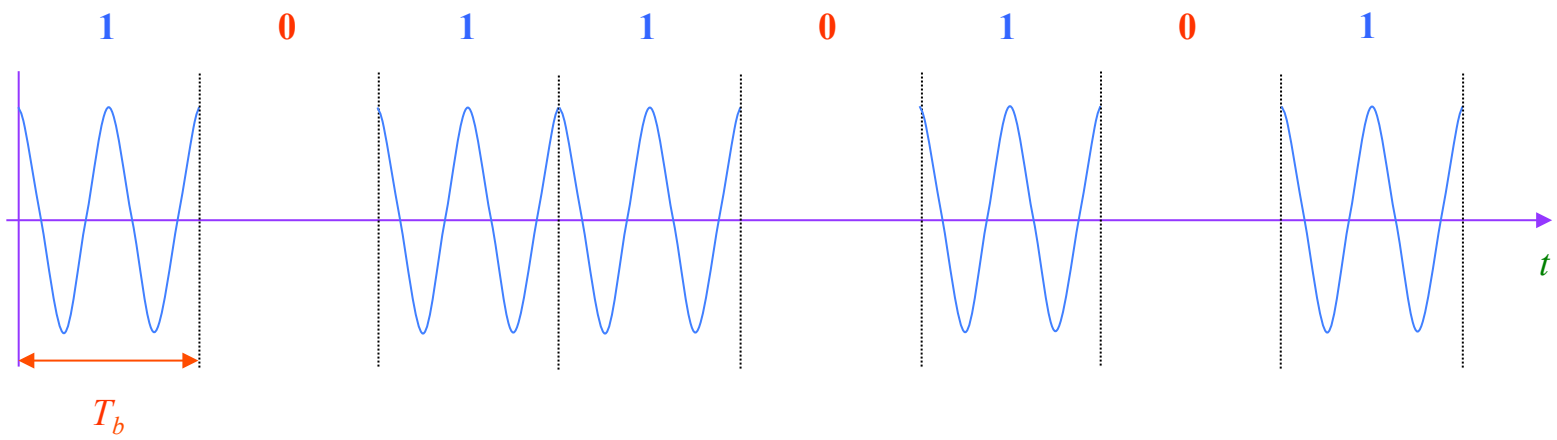
Sistema ASK (*Amplitude-Shift Keying*):

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_c t) & \text{símbolo 1} \\ 0 & \text{símbolo 0} \end{cases}$$

f_c = frequência da portadora

A_c = amplitude da portadora

T_b = duração de um símbolo

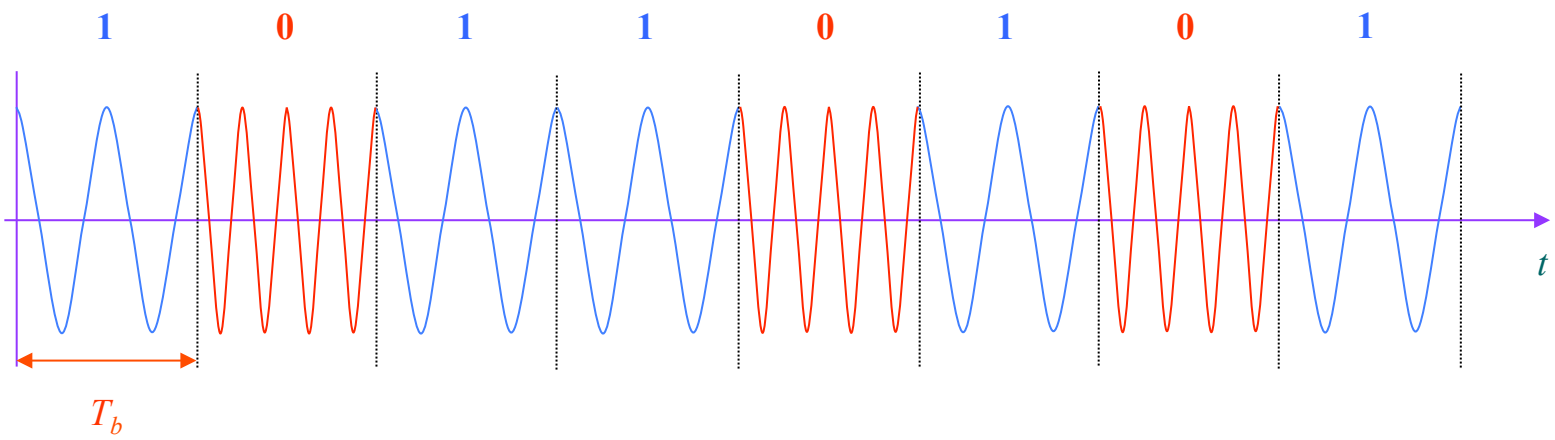


Sistema FSK (*Frequency-Shift Keying*):

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_1 t) & \text{símbolo } 1 \\ A_c \cos(2\pi f_2 t) & \text{símbolo } 0 \end{cases}$$

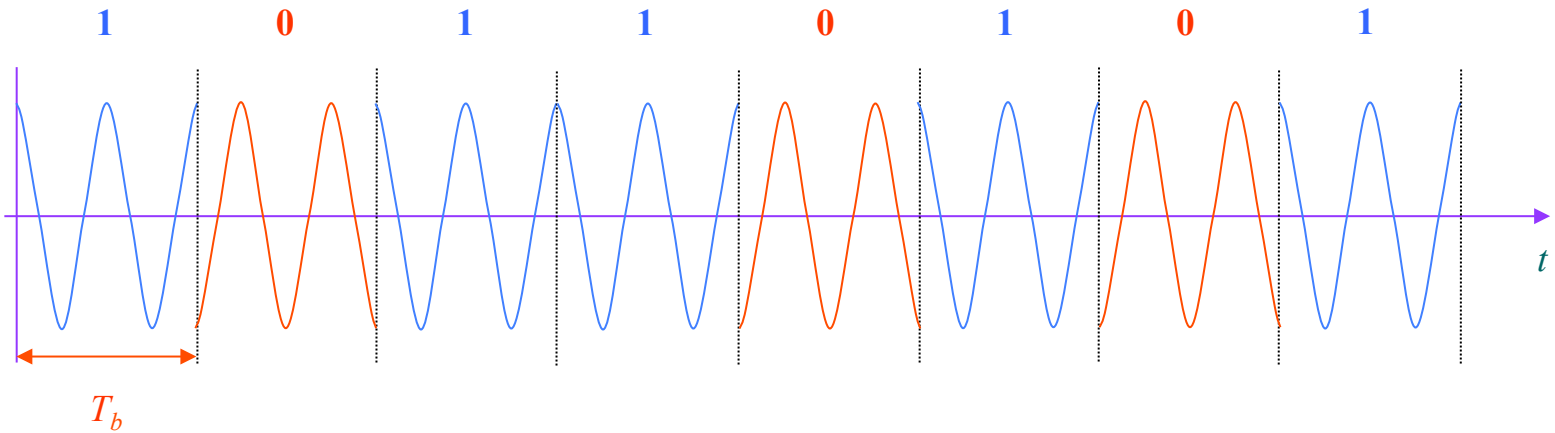
f_1 = frequência associada ao símbolo binário 1

f_2 = frequência associada ao símbolo binário 0



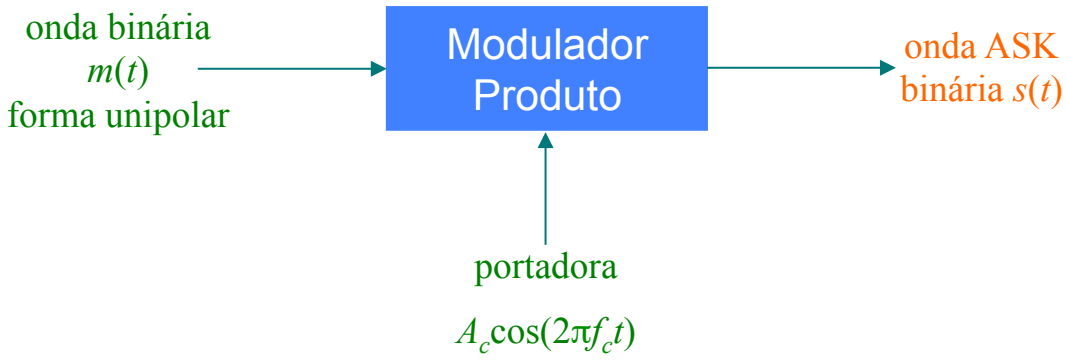
Sistema PSK (*Phase-Shift Keying*):

$$s(t) = \begin{cases} A_c \cos(2\pi f_c t) & \text{símbolo 1} \\ A_c \cos(2\pi f_c t + \pi) & \text{símbolo 0} \end{cases}$$

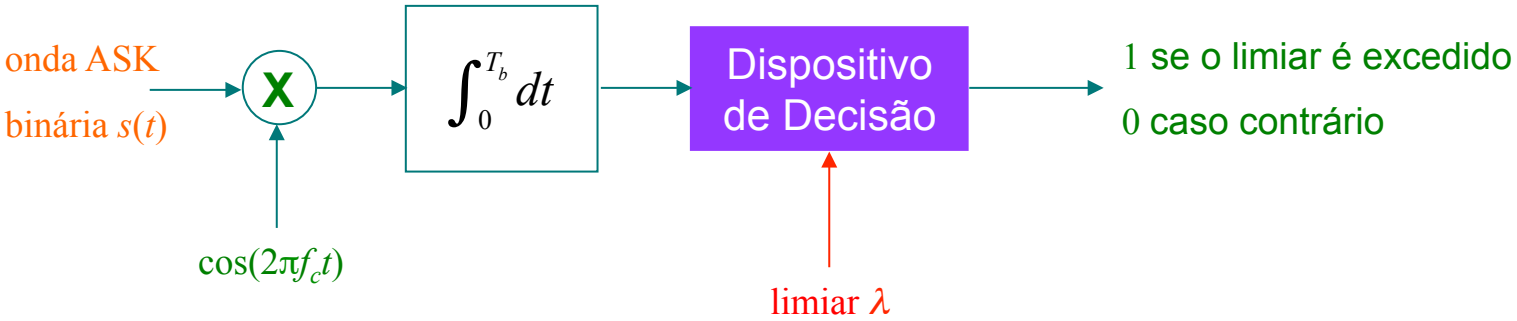


Geração e detecção de ondas moduladas binárias:

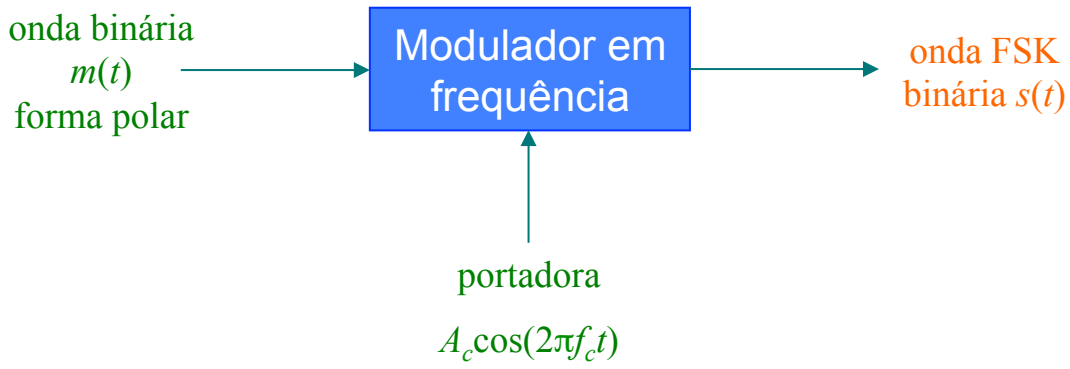
Geração do ASK:



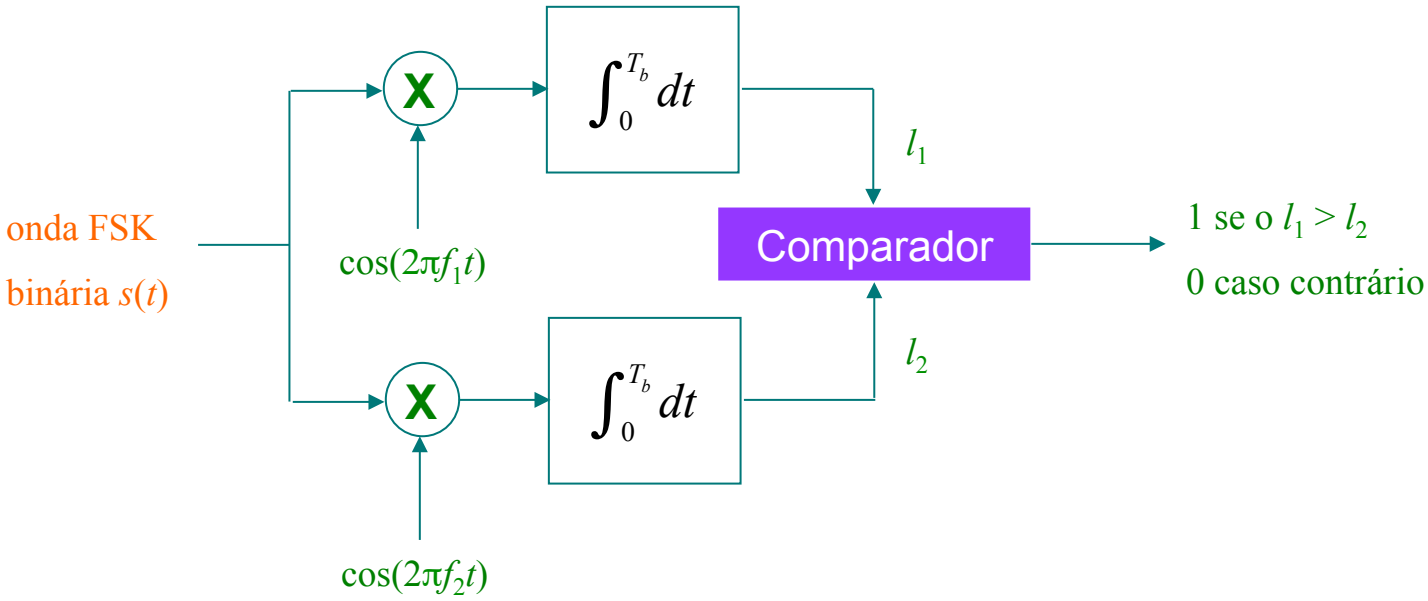
Detecção coerente do ASK:



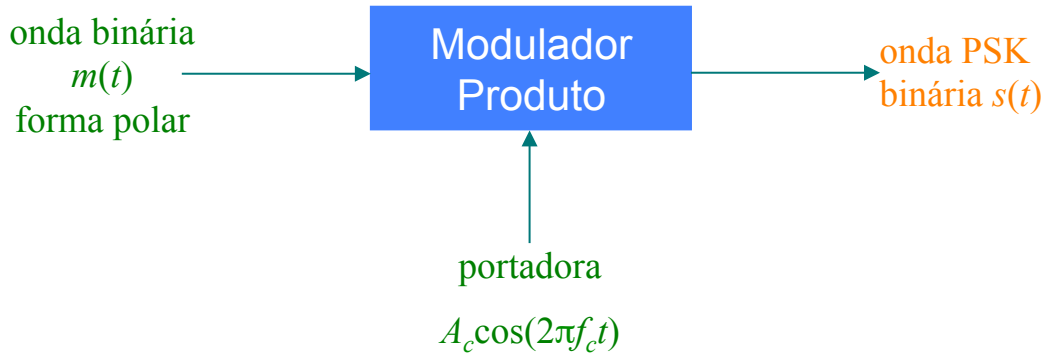
Geração do FSK:



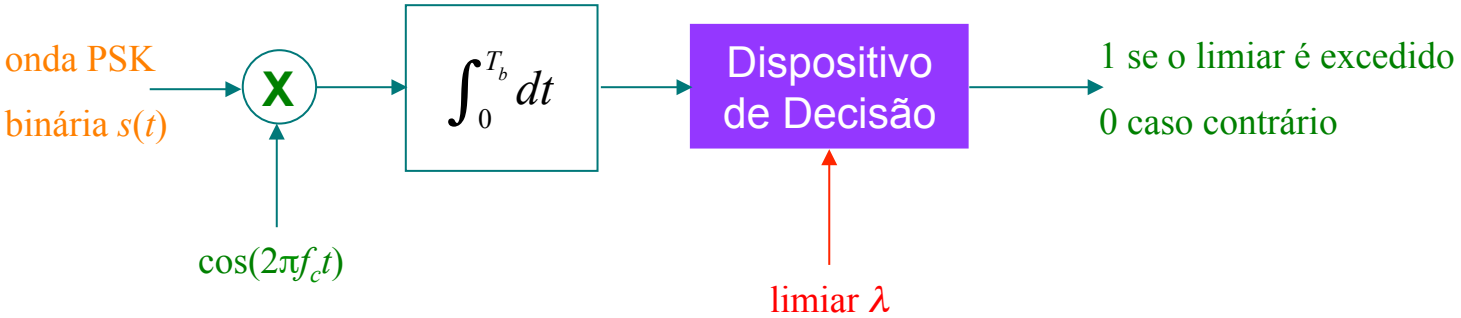
Detecção coerente do FSK:



Geração do PSK:



Detecção coerente do PSK:



Detectores coerentes necessitam de duas formas de sincronização para operarem corretamente:

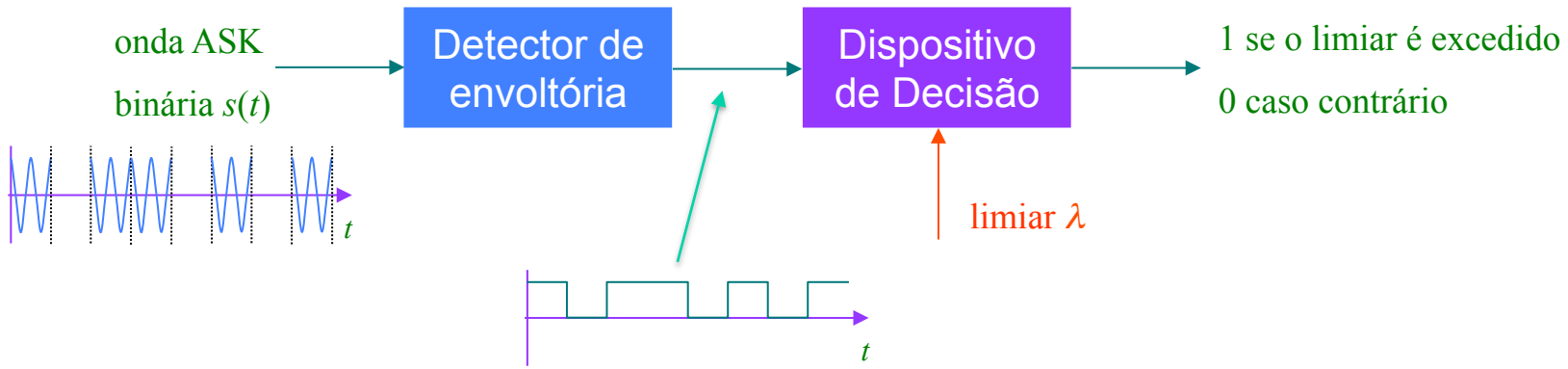
- sincronismo de fase - garante que a portadora gerada no receptor está amarrada em fase com a fase empregada pelo modulador no transmissor.

- sincronismo de relógio - garante que o instante de tempo para a realização da decisão no receptor esteja sincronizado com relação aos chaveamentos entre o 0 e o 1 da sequência de dados na entrada do modulador no transmissor.

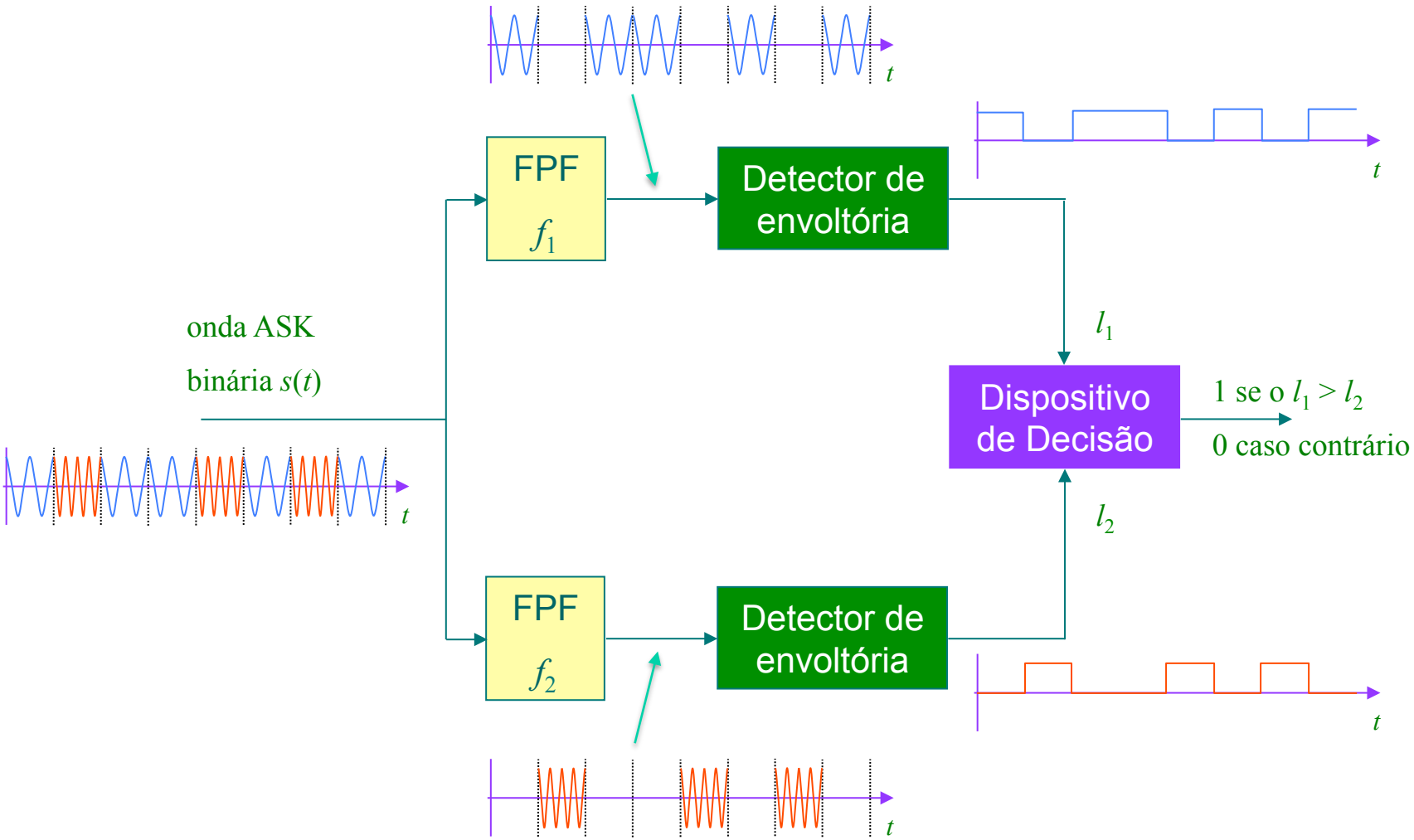
Detectores não coerentes:

- ✓ mais simples de serem implementados.
- ✓ funcionamento independe de sincronismo de fase.

ASK: sinal modulado pode ser detectado utilizando um detector de envoltória.



FSK: sinal modulado pode ser detectado passando-o por dois filtros sintonizados, um deles em f_1 e o outro em f_2. Cada filtro é seguido de um detector de envoltória.



PSK: sinal modulado não pode ser detectado de forma não coerente!

Para eliminar a dependência do sincronismo de fase do PSK, pode-se utilizar um codificador diferencial.

Codificação diferencial: a informação digital contida em um dado binário é codificada em termos de transições do sinal.

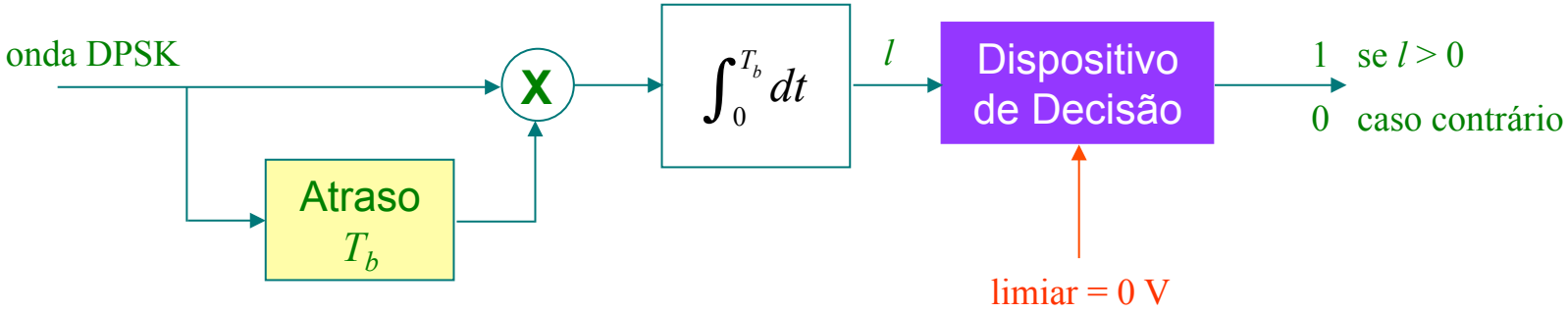
Exemplo:

Pode-se usar o símbolo 0 para representar uma transição, em relação a um bit codificado previamente, em uma dada sequência binária e o símbolo 1 para representar a não transição.

DPSK (*diferential phase-shift keying*) combina codificação diferencial com modulação PSK.

Dados binários		1	0	0	1	0	0	1	1
Dados binários codificados diferencialmente	1	1	0	1	1	0	1	1	1
Transição:	↑ bit inicial	↑ não	↑ sim	↑ não	↑ não	↑ sim	↑ não	↑ não	↑ não
Fase do sinal DPSK (radianos)	0	0	π	0	0	π	0	0	0

Recepção da onda DPSK:



T_b = duração de um bit

Saída do integrador proporcional a $\cos(\phi)$

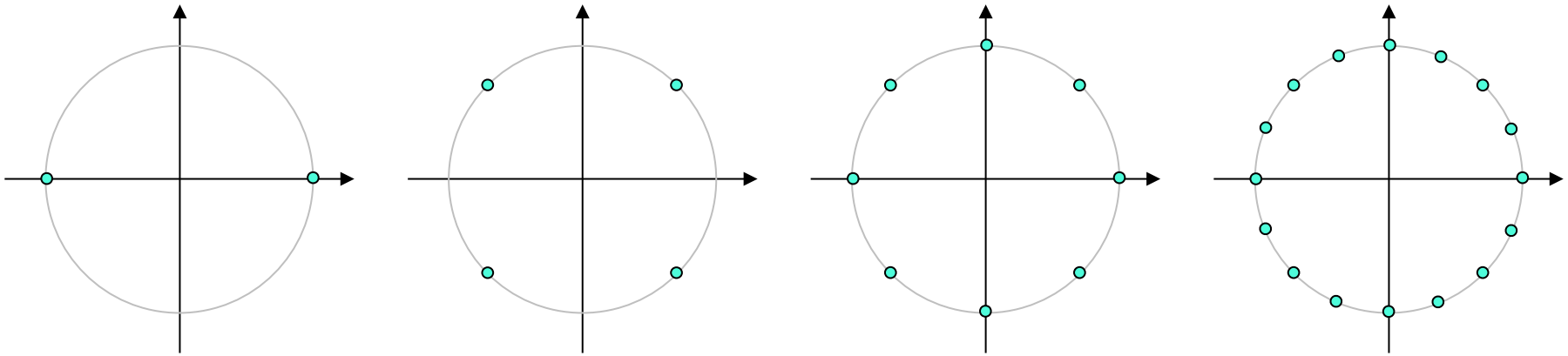
ϕ = diferença entre os ângulos da fase da portadora do sinal recebido DPSK e sua versão atrasada.

$\phi = 0 \Rightarrow$ símbolo $1 \Rightarrow$ saída do integrador > 0

$\phi = \pi \Rightarrow$ símbolo $0 \Rightarrow$ saída do integrador < 0

M-PSK – *M*-ary phase-shift keying

Em um sistema de transmissão M-ário, um entre M possíveis sinais (símbolos) é enviado, durante um intervalo de sinalização T.



2-PSK ou BPSK 4-PSK ou QPSK 8-PSK 16-PSK

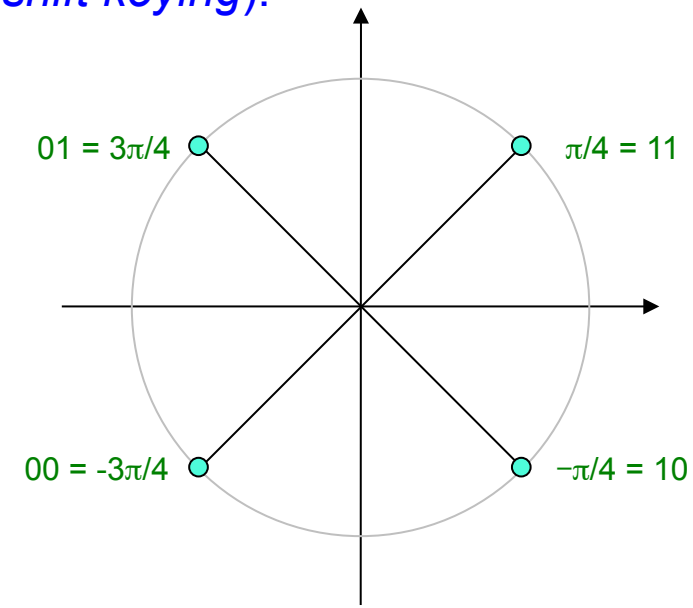
Número de possíveis sinais: $M = 2^n$, onde n é um inteiro.

Intervalo de sinalização: $T = nT_b$

T_b = duração de um bit

Quando $M = 4 \Rightarrow$ QPSK (*Quadriphase-shift keying*)$\Rightarrow$ cada símbolo carrega 2 bits.

QPSK (*Quadriphase-shift keying*):



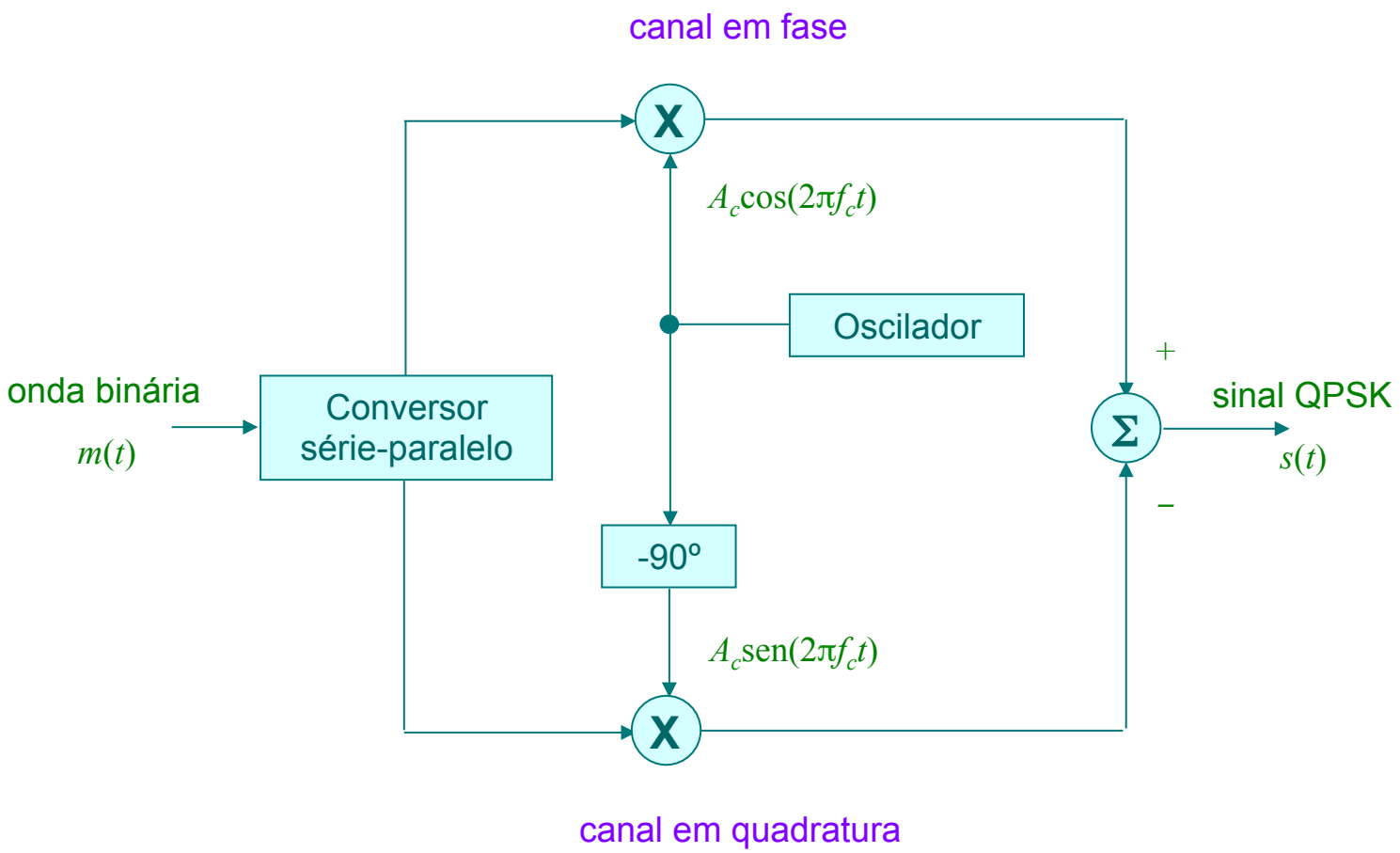
$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]$$

$$s(t) = \underbrace{A_c \cos\left[\phi(t)\right]}_{\substack{\text{componente}\\ \text{em fase}}} \cos\left(2\pi f_c t\right) - \underbrace{A_c \operatorname{sen}\left[\phi(t)\right]}_{\substack{\text{componente}\\ \text{em quadratura}}} \operatorname{sen}\left(2\pi f_c t\right)$$

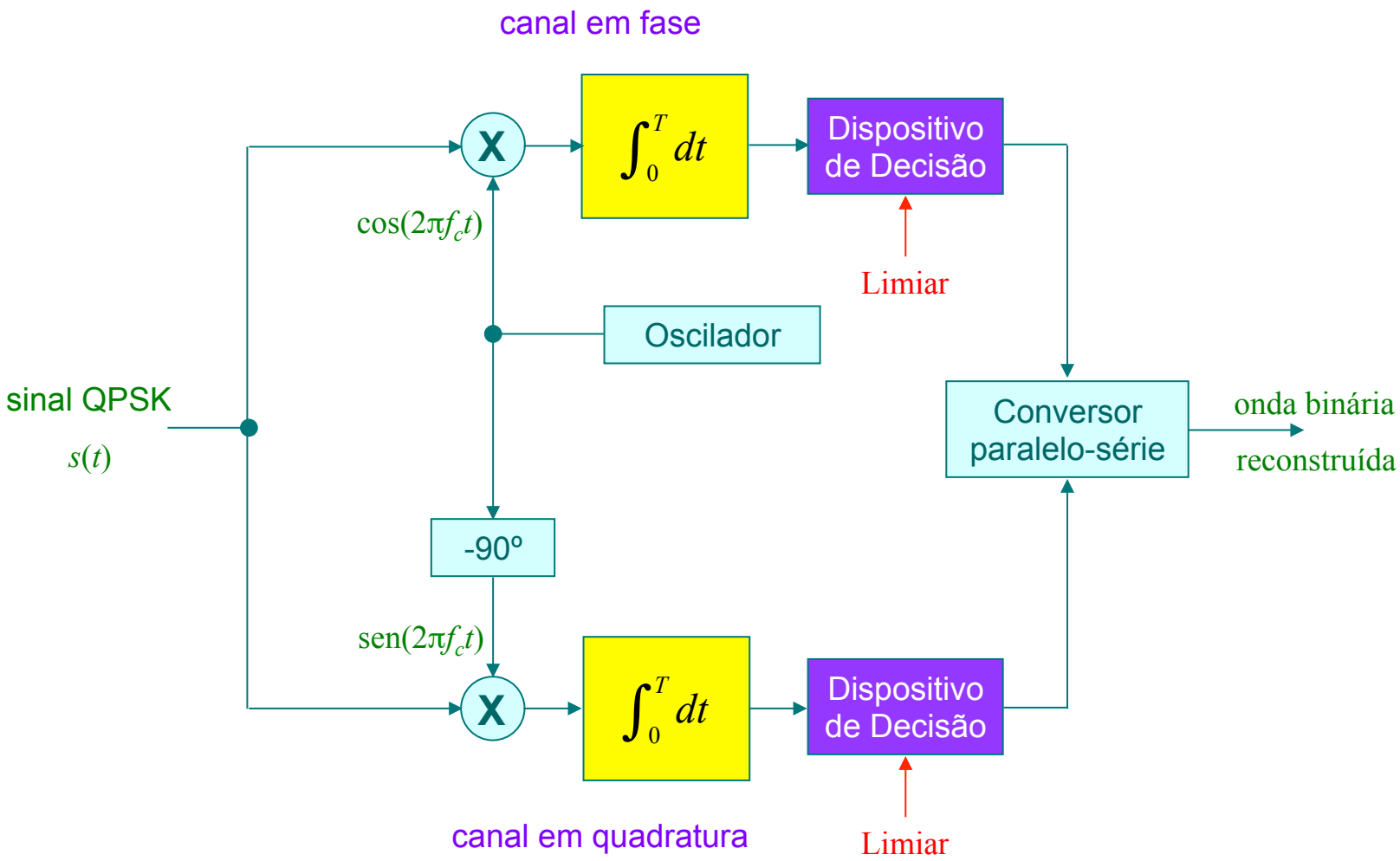
onde $\phi(t) = -3\pi/4, -\pi/4, \pi/4$ e $3\pi/4$; e $0 \le t \le T$

duração de 1 símbolo: $T = 2T_b$

Transmissor QPSK:

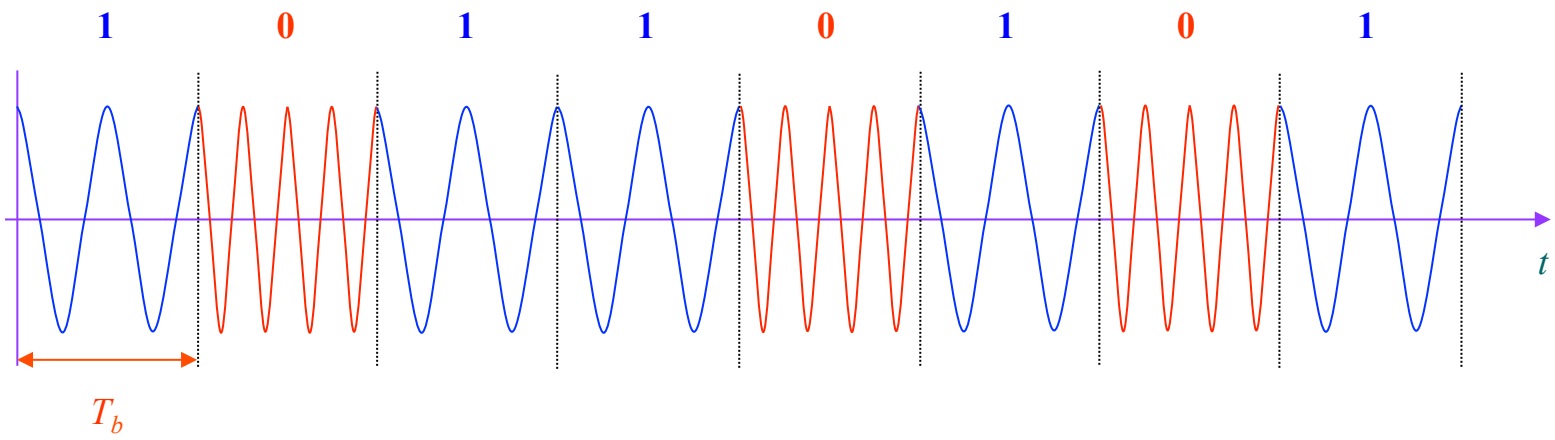


Receptor QPSK:



MSK (*Minimum shift keying*)

FSK binário:



A continuidade da fase é mantida nos pontos de transição.

Este tipo de modulação é conhecida como CPFSK (*continuous-phase frequency-shift keying*).

Caso especial: MSK (*minimum shift keying*)

MSK: uma mudança na frequência da portadora do símbolo 0 para o 1, ou vice versa, é igual a metade da taxa de bit do dados de entrada do modulador.

Seja (δf) uma mudança de frequência e T_b a duração de um bit, então:

$$\left(\delta f\right) = \frac{1}{2T_b}$$

Seja as frequências f_1 e f_2 representando as transições do símbolo 1 e 0, respectivamente. Assim,

$$f_1 = \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{f_1 - f_2}{2} = f_c + \frac{\left(\delta f\right)}{2}$$

onde

$$f_c = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

$$\left(\delta f\right) = f_1 - f_2$$

Sinal MSK: $s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]$

onde $\phi(t) = \pm\pi(\delta f)t$

Transmissão do símbolo 1 muda a fase de $s(t)$ da quantidade:

$$\phi(t) = \pi(\delta f)t = \frac{\pi t}{2T_b}$$

Note que, no final do intervalo de transmissão do símbolo 1, a fase da onda MSK aumenta de um valor igual a $\pi/2$ radianos.

Transmissão do símbolo 0 muda a fase de $s(t)$ da quantidade:

$$\phi(t) = -\pi(\delta f)t = -\frac{\pi t}{2T_b}$$

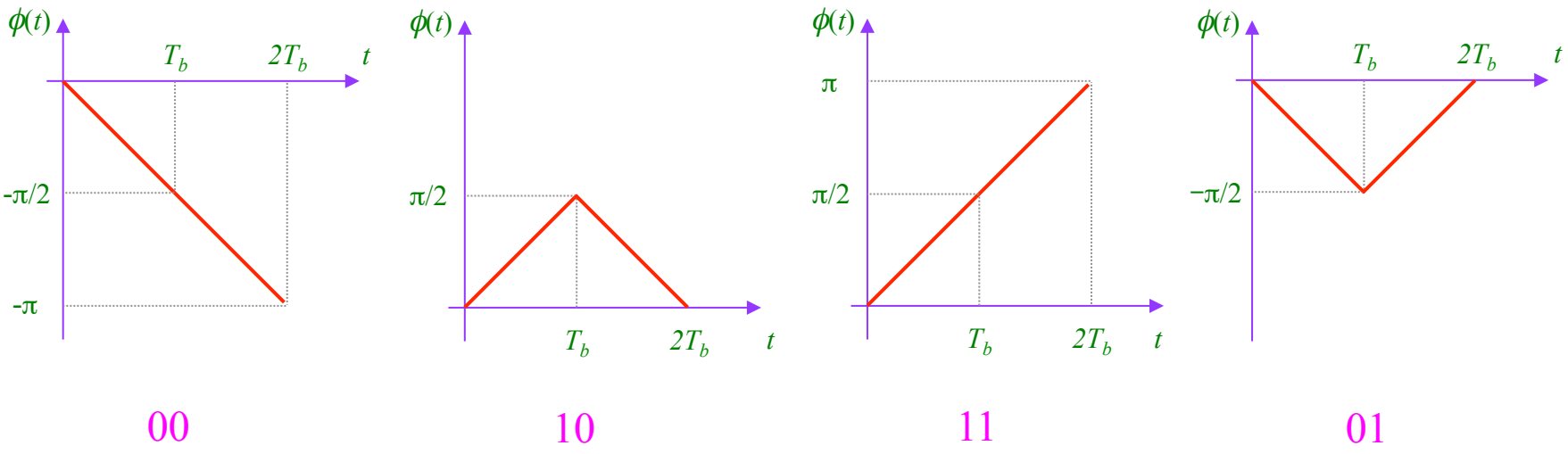
Note que, no final do intervalo de transmissão do símbolo 0, a fase da onda MSK diminui de um valor igual a $\pi/2$ radianos.

Demonstração de que o MSK pode ser visto como um outro exemplo de multiplexação em quadratura:

$$s(t) = A_c \cos\left[2\pi f_c t + \phi(t)\right]$$

$$= \underbrace{A_c \cos\left[\phi(t)\right]}_{\substack{\text{componente}\\ \text{em fase}}} \cos(2\pi f_c t) - \underbrace{A_c \operatorname{sen}\left[\phi(t)\right]}_{\substack{\text{componente}\\ \text{em quadratura}}} \operatorname{sen}(2\pi f_c t)$$

Transmissão dos dibits 00, 10, 11 e 01, para condição inicial $\phi(0) = 0$:



Dibit (código de Gray)	$\text{sen}[\phi(T_b)]$	$\cos[\phi(2T_b)]$
00	-1	-1
10	+1	+1
11	+1	-1
01	-1	+1

A identidade de cada dibit é unicamente definida pelo par $\{\text{sen}[\phi(T_b)], \cos[\phi(2T_b)]\}$.

MSK é uma modulação em frequência, o deslocamento de fase $\phi(t)$ da portadora varia com o tempo.

O sinal MSK pode ser gerado utilizando um modulador em frequência que obedece a condição:

$$(\delta f) = \frac{1}{2T_b}$$

A detecção coerente MSK é realizada por dois correladores com memória com a decisão feita em pares de bits.

8. Ruído em Esquemas de Modulação Digital

O teste de hipótese binário também pode ser aplicado para calcular o desempenho de ruído de várias modulações digitais.

Ruído AWGN na entrada do receptor.

8.1 Detecção Coerente de Ondas Moduladas Binárias (ASK, PSK e FSK)

Assumimos que o receptor possui perfeito conhecimento da fase do sinal recebido, isto é, existe um sincronismo de fase entre o receptor e o transmissor.

Modulações digitais:

ASK binário: $s_0(t) = 0 \Rightarrow 0$

$s_1(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) \Rightarrow 1$

PSK binário: $s_0(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \pi) \Rightarrow 0$

$s_1(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) \Rightarrow 1$

FSK binário: $s_0(t) = A_c \cos(2\pi f_2 t) \Rightarrow 0$

$s_1(t) = A_c \cos(2\pi f_1 t) \Rightarrow 1$

Em todas as equações acima $0 \le t \le T_b$, onde T_b é a duração de um bit.

No FSK, as frequências f_1 e f_2 são grandes quando comparadas com $1/T_b$.

No ASK e PSK a frequência f_c é grande quando comparada com $1/T_b$.

No FSK e PSK a mesma energia de sinal por bit é transmitida:

$$E_b = \int_0^{T_b} s_0^2(t)\,dt = \int_0^{T_b} s_1^2(t)\,dt = \frac{A_c^2 T_b}{2}$$

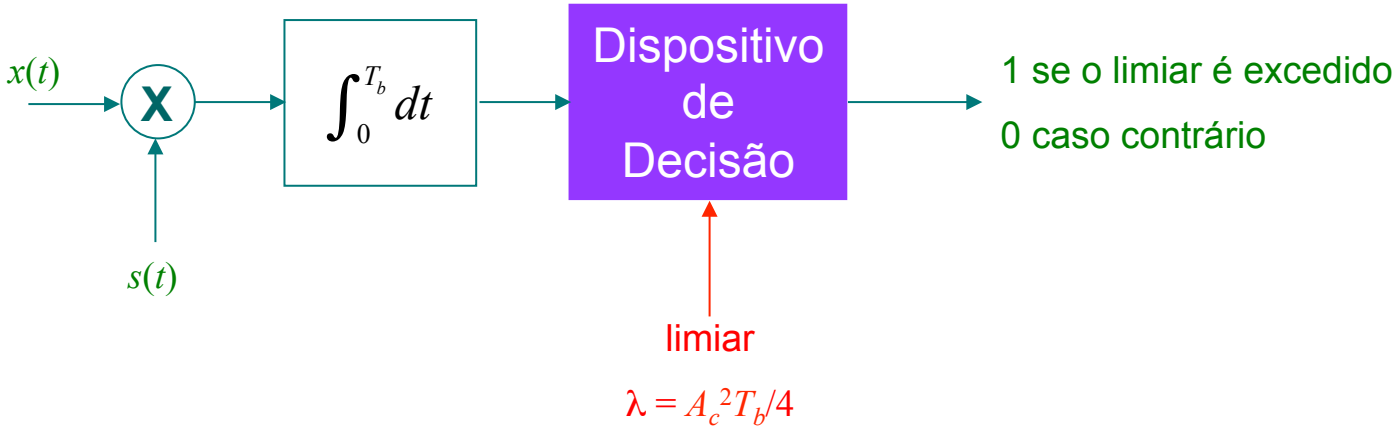
No ASK, a energia de sinal alterna entre 0 e $A_c{}^2 T_b/2$, então, a energia média de sinal por bit é:

$$E_{av} = \frac{A_c^2 T_b}{4}$$

Assumiremos que os bits 0 e 1 são enviados com igual probabilidade:

$$\boxed{p = q = \frac{1}{2}}$$

Detecção Coerente de Sinais ASK:



Limiar supondo símbolo 0 e 1 equiprováveis:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{A_c^2 T_b}{2}\right) = \frac{A_c^2 T_b}{4}$$

Probabilidade de erro média:

A operação de um receptor com filtro casado (correlação) em AWGN depende apenas da razão energia de sinal por densidade espectral de potência do ruído e não da forma de onda, então:

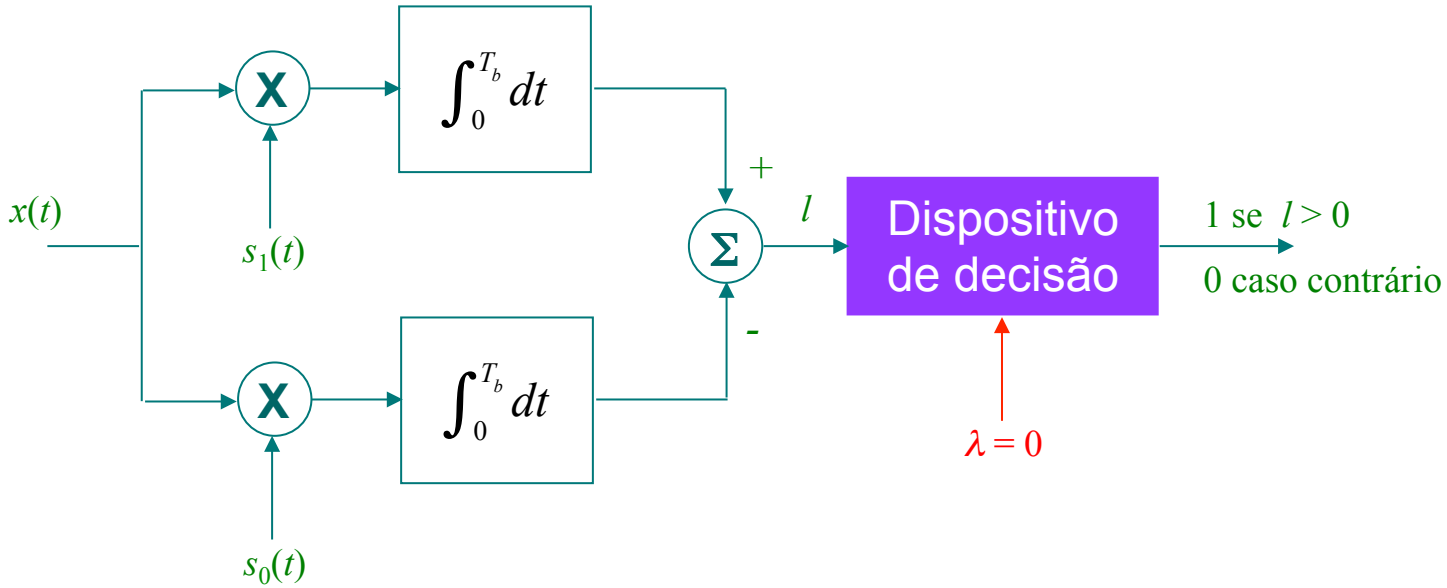
$$P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_c^2 T_b}{2N_0}}\right)$$

Usando a definição de energia média por bit, podemos reescrever a expressão acima como:

$$P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_{av}}{2N_0}}\right)$$

Receptor coerente generalizado para decisão binária:

Receptor ótimo para detecção coerente de sinais FSK e PSK:



Assumimos que o receptor está sincronizado com o transmissor:

- o receptor está equipado com réplicas dos sinais transmitidos $s_0(t)$ e $s_1(t)$.
- a realização do processo de decisão no receptor é coincidente com a duração do bit do sinal transmitido.

Saída l do receptor:

$$l = \int_0^{T_b} x(t)\left[s_1(t) - s_0(t)\right]dt$$

$x(t)$ = sinal + ruído.

A saída l é comparada com o limiar 0 Volt.

Se $l > 0$ decide-se pelo símbolo 1, caso contrário, escolhe-se o símbolo 0, assumindo que os símbolos 0 e 1 são equiprováveis.

Como o ruído $w(t)$ é gaussiano, a saída do receptor possui distribuição gaussiana.

O valor médio da saída do receptor é condicionado ao símbolo binário que foi transmitido.

A variância da saída do correlador é a mesma para ambos os símbolos transmitidos.

Média condicional da saída do correlador dado que o símbolo 0 foi transmitido:

$$m_0 = \int_0^{T_b} s_0(t)\left[s_1(t) - s_0(t)\right]dt = -E_b(1-\rho)$$

E_b = energia de sinal por bit.

ρ = coeficiente de correlação dos sinais $s_0(t)$ e $s_1(t)$ definido por:

$$\rho = \frac{\int_0^{T_b} s_0(t)s_1(t)dt}{\sqrt{\int_0^{T_b} s_0^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{T_b} s_1^2(t)dt}} = \frac{1}{E_b}\int_0^{T_b} s_0(t)s_1(t)dt$$

onde $-1 \leq \rho \leq 1$.

Média condicional da saída do correlador dado que o símbolo 1 foi transmitido:

$$m_1 = \int_0^{T_b} s_1(t)\left[s_1(t) - s_0(t)\right]dt = E_b(1-\rho)$$

Variância condicional da saída do correlador dado que o símbolo 0 (ou 1) foi transmitido:

$$\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \frac{N_0}{2}\int_0^{T_b}\left[s_1(t) - s_0(t)\right]^2 dt = N_0 E_b (1-\rho)$$

Um erro ocorre quando um símbolo 0 (1) é enviado e a saída do correlador l é maior (menor) que 0 Volt, decidindo-se por um símbolo 1 (0).

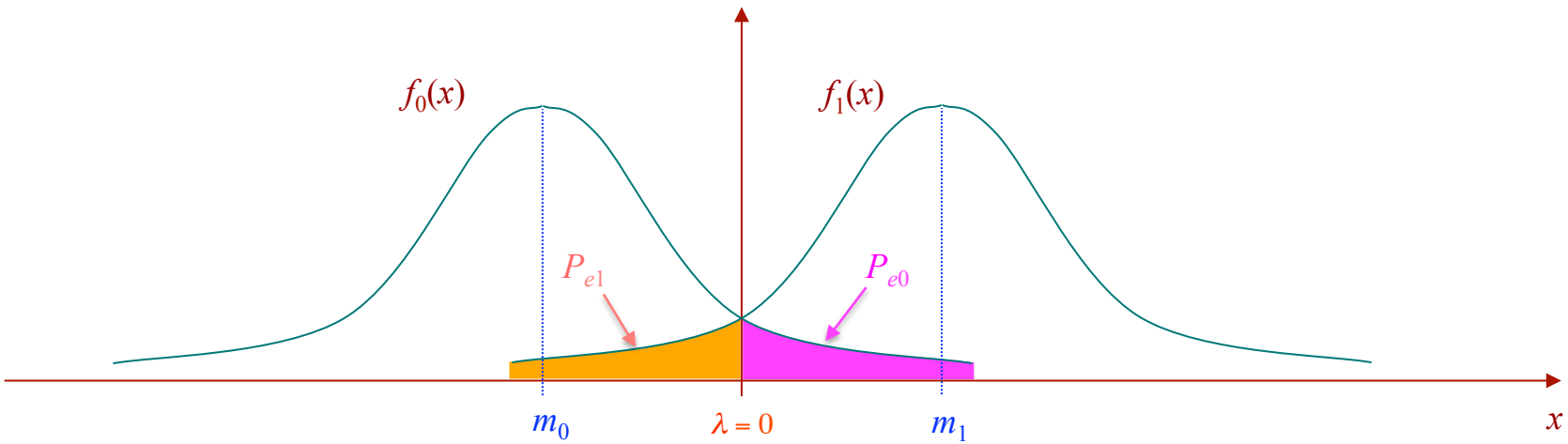
Pela simetria do receptor, as probabilidades condicionais de ambos tipos de erro são iguais.

Sob a condição de que os símbolos 0 e 1 ocorrem com igual probabilidade, a probabilidade média de erro do receptor é dada por:

$$\boxed{P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{2N_0}}\right)}$$

Funções densidade de probabilidade condicional para as modulações FSK e PSK:

Probabilidades a priori idênticas: $p = q = 1/2$



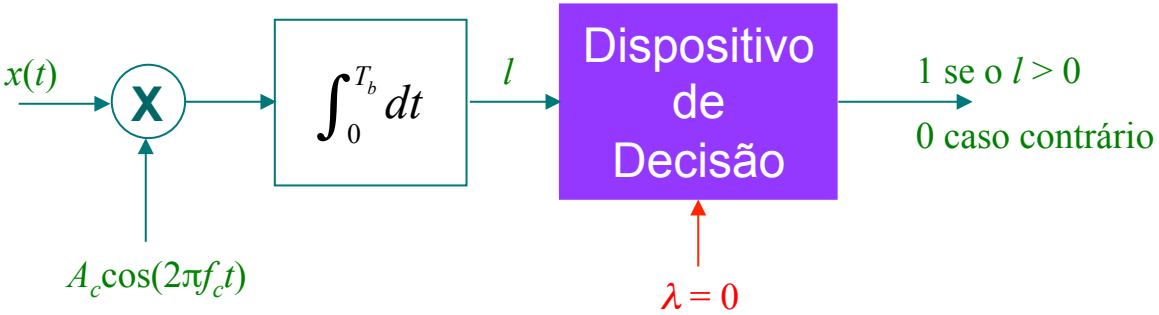
$$m_0 = -E_b\left(1-\rho\right)$$

$$m_1 = E_b\left(1-\rho\right)$$

$$P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b\left(1-\rho\right)}{2N_0}}\right)$$

Casos especiais:

1. Detecção coerente de sinais PSK binários:



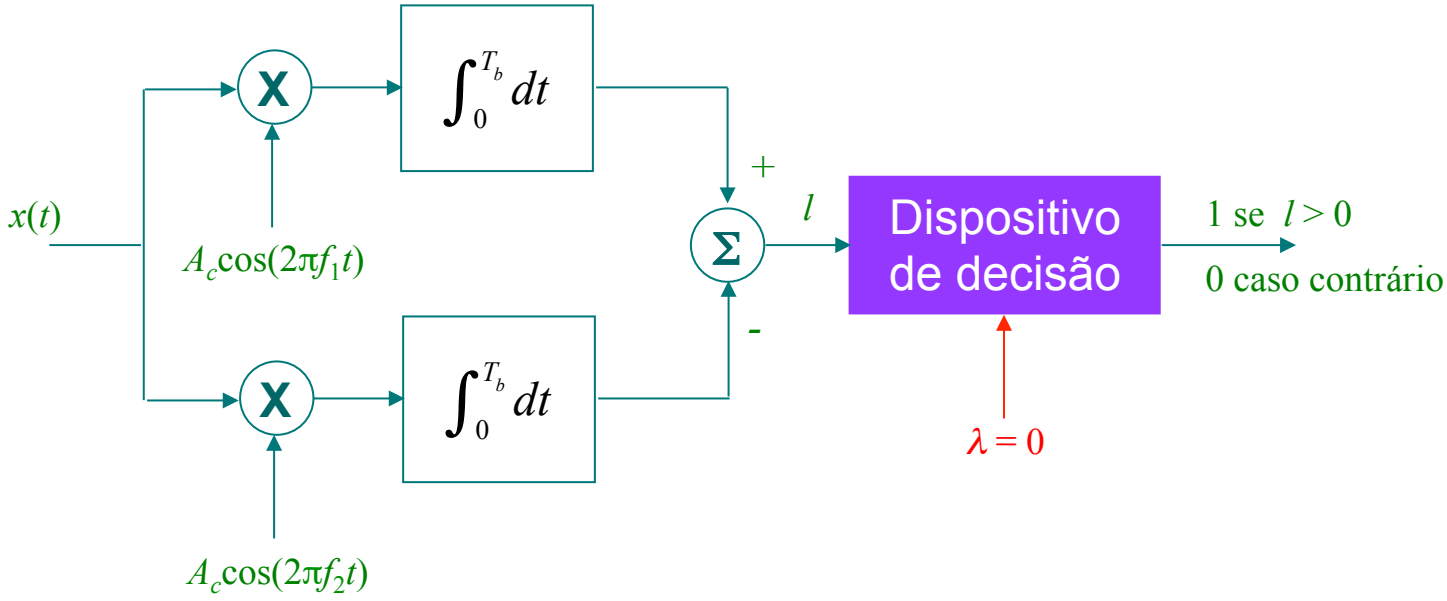
Note que $s_0(t)$ é o negativo de $s_1(t)$ e o coeficiente de correlação $\rho = -1$.

Os sinais $s_0(t)$ e $s_1(t)$ são chamados de sinais antipodais.

A probabilidade de erro média para o receptor coerente PSK é:

$$P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

2. Detecção coerente de sinais FSK binários:



As frequências f_2 e f_1 são geralmente espaçadas suficientemente de modo que $s_0(t)$ e $s_1(t)$ são consideradas ortogonais, ou seja, $\rho = 0$.

A probabilidade de erro média para o receptor coerente FSK é:

$$P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$

8.2 Detecção Não Coerente de Ondas Moduladas Binárias

Na prática, a obtenção da portadora local no receptor para a realização da detecção coerente, é feita através do sinal recebido.

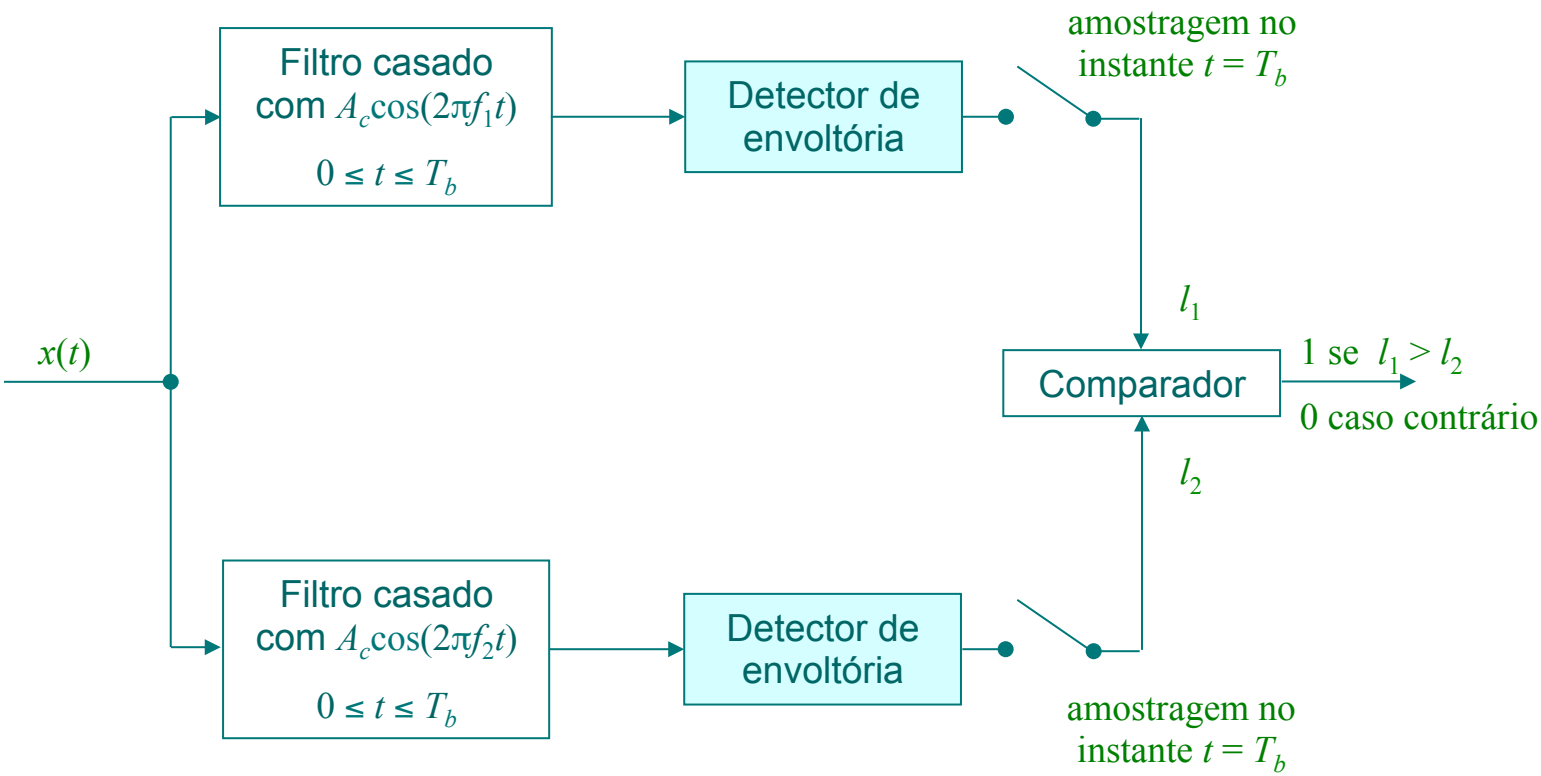
Assim, a portadora local possui uma certa quantidade de incerteza devido ao ruído e as interferências introduzidas pelo canal.

Parâmetro com maior incerteza: a fase da portadora local em relação a fase da portadora recebida.

Sincronização com a fase da portadora transmitida $\Rightarrow$ difícil e cara.

Solução: detecção não coerente.

Detecção Não-Coerente de Sinais FSK Binários:



O detector de envoltória serve para eliminar a dependência das saídas dos filtros casados da fase desconhecida do sinal recebido.

As envoltórias resultantes são amostradas uma vez a cada T_b segundos.

As amostras das envoltórias do caminho superior e inferior do receptor são denotadas por l_0 e l_1.

Se $l_0 < l_1$ o receptor decide pelo símbolo 1, caso contrário, decide pelo 0.

A probabilidade de erro média para o receptor não-coerente, assumindo que os símbolos são equiprováveis ($p = q$) é dada por:

$$P_e = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)$$

onde E_b é a energia de sinal FSK por bit e $N_0/2$ é a densidade espectral de potência bilateral do canal ruidoso (AWGN com média zero).

PSK Diferencial (DPSK):

DPSK opera sob a condição de que a fase θ do sinal recebido permanece essencialmente constante no intervalo de dois bits.

No detector DPSK, o sinal de referência é contaminado pelo ruído aditivo na mesma extensão que o pulso de informação, isto é, ele tem a mesma razão sinal/ruído.

Isto faz com que a obtenção da probabilidade de erro se torne muito complicada.

Probabilidade de erro total:

$$P_e = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$$

Como o receptor DPSK realiza sua decisão baseada no sinal recebido em dois intervalos de bits sucessivos, existe uma tendência dos erros de bits ocorrerem em pares.

8.3 Detecção Coerente de Ondas Moduladas Quaternárias

Problema: ondas moduladas binárias não fazem uso eficiente da faixa de passagem do canal.

Solução: multiplexagem em quadratura.

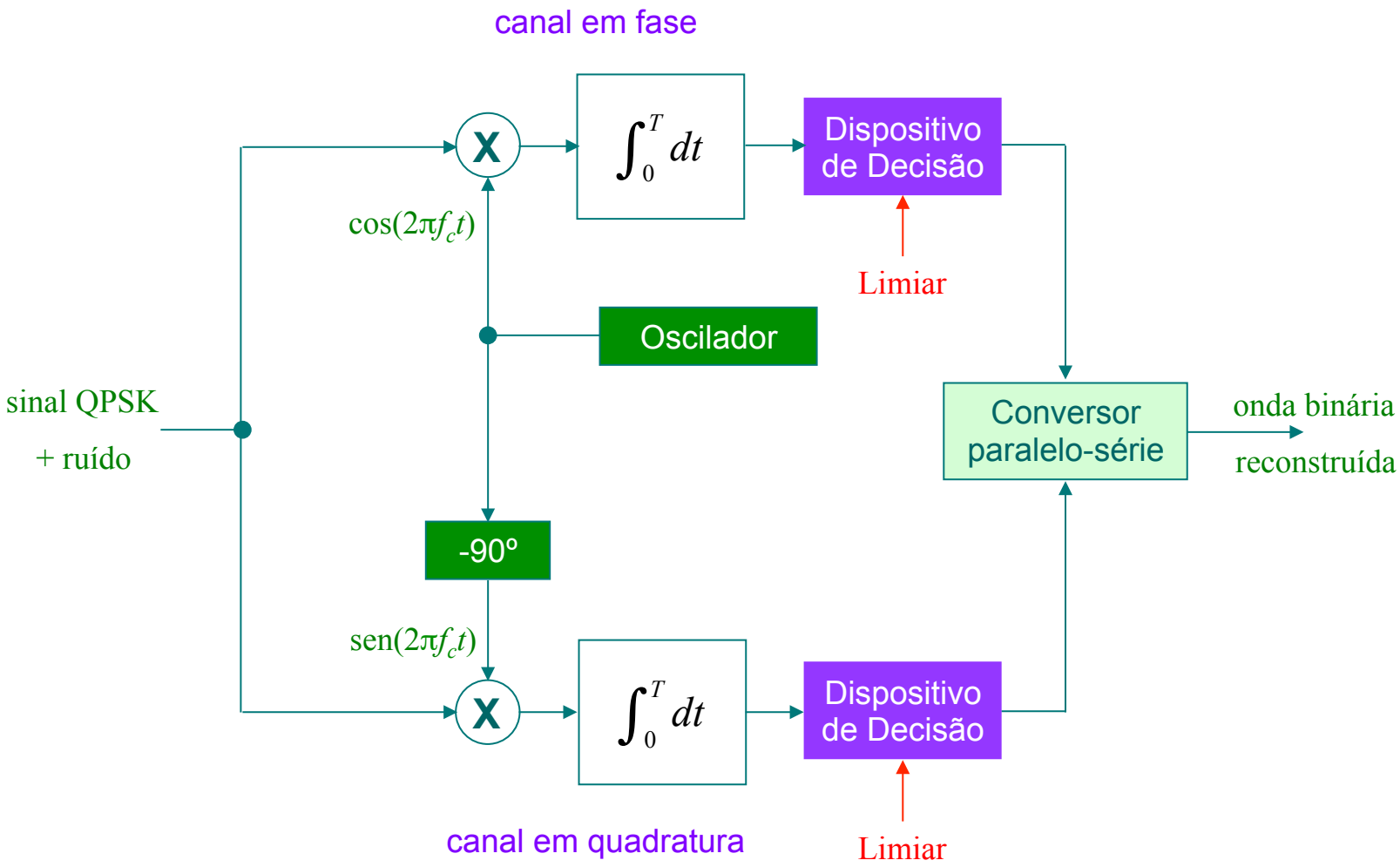
QPSK: $\pm \pi/4, \pm 3\pi/4 \Rightarrow 00, 10, 11$ e 01

MSK: continuidade de fase é mantida nos pontos de transição entre bits da sequência de dados binários e a mudança de frequência de portadora do símbolo 1 para o símbolo 0 é feita igual a metade da taxa de bit dos dados binários.

QPSK e MSK exibem o mesmo desempenho quando se utiliza detecção coerente na presença de AWGN na entrada do receptor.

Cálculo da probabilidade de erro de símbolo para o QPSK:

Detector coerente para QPSK:



Ruído: AWGN com média zero e densidade espectral de potência bilateral igual a $N_0/2$.

Os dibits 00, 10, 11 e 01 ocorrem com igual probabilidade.

A probabilidade de erro P_{eI} do canal em fase e a probabilidade de erro P_{eQ} do canal em quadratura são dadas por:

$$P_{eI} = P_{eQ} = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

E = energia de sinal por símbolo transmitida.

Probabilidade de recepção correta:

$$P_c = \left(1 - P_{eI}\right)\left(1 - P_{eQ}\right)$$

Como geralmente $P_{eI} = P_{eQ}$ temos:

$$P_c \cong 1 - 2P_{eI}$$

Probabilidade média de erro de símbolo no receptor QPSK:

$$P_e = 1 - P_c \cong 2P_{eI} = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

Entretanto, no QPSK, existem 2 bits por símbolo, então:

$$E = 2E_b$$

onde E_b é a energia por bit.

Assim, a probabilidade média de erro de símbolo em termos de E_b/N_0 é dada por:

$$\boxed{P_e \cong \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

9. Comparação de Desempenho de Ruído entre Diferentes Esquemas de Modulação Digital

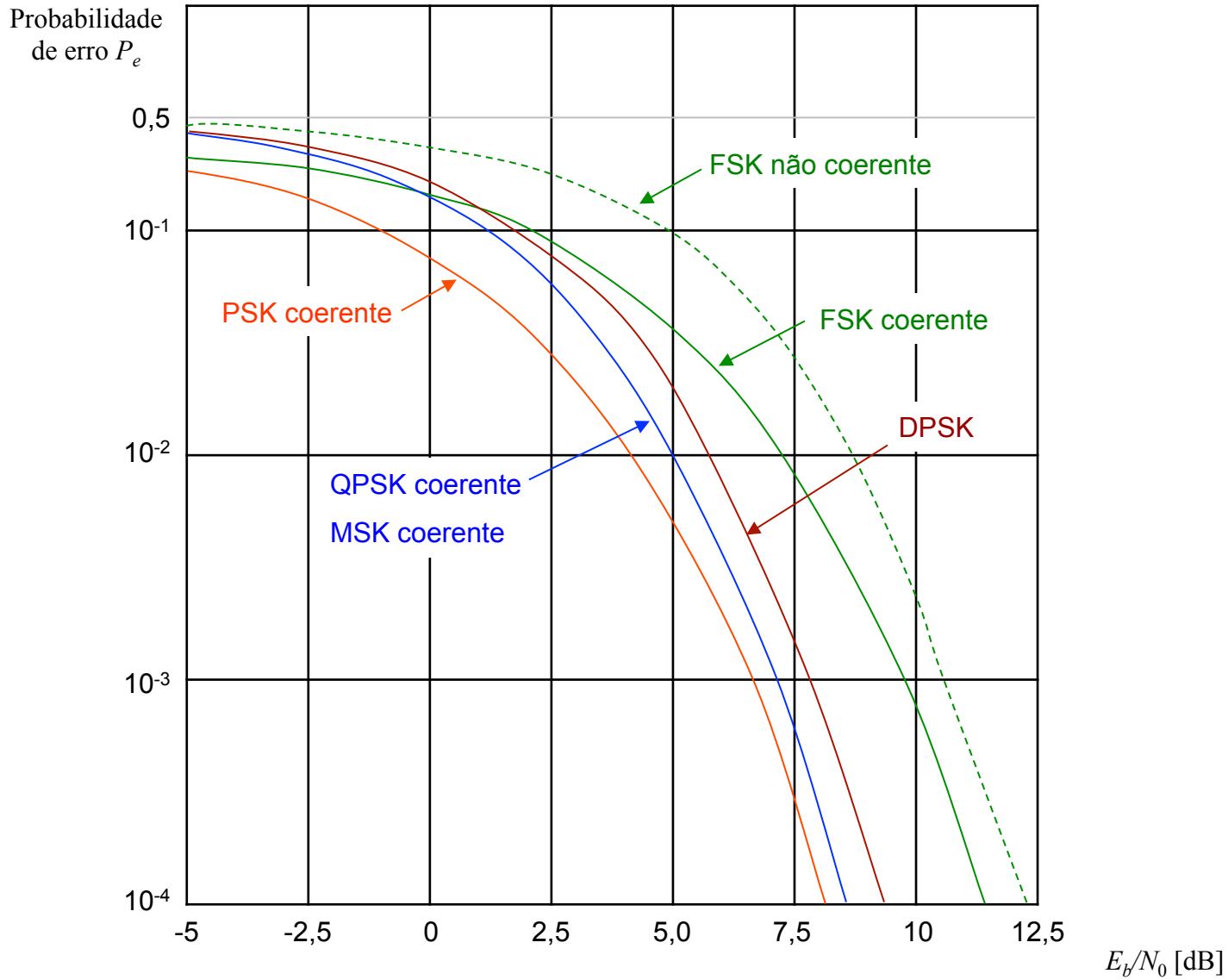
O que importa na comparação entre dois sistemas de modulação digital, sob as mesmas condições de probabilidade de erro, não é a quantidade de energia necessária para transmitir um símbolo particular mas sim a quantidade de energia necessária para se transmitir a mensagem completa.

A base para a comparação é pela probabilidade de erro de símbolo em função da razão da energia de sinal por bit pela potência de ruído por unidade de largura de faixa, isto é, E_b/N_0.

Expressões de probabilidade de erro de símbolo para várias modulações digitais:

PSK coerente:	$P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
FSK coerente:	$P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$
QPSK coerente: MSK coerente:	$P_e = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
FSK não coerente:	$P_e = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{2N_0}\right)$
DPSK:	$P_e = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$

Gráfico de P_e versus E_b/N_0:



Note que:

1. As taxas de erro para todos os sistemas caem monotonamente com o aumento de E_b/N_0.

2. Para qualquer valor de E_b/N_0, PSK coerente produz uma menor taxa de erro que qualquer outro sistema.

3. PSK e DPSK coerente necessitam de $3\ \mathrm{dB}$ a menos de E_b/N_0 que seus equivalentes FSK coerente e FSK não-coerente, para trabalhar na mesma taxa de erro.

4. Para altos valores de E_b/N_0, receptores não-coerentes (FSK não-coerente e DPSK) possuem desempenho quase tão bom ($\text{perda de} \sim 1\ \text{dB}$) quanto seus equivalentes coerentes (FSK coerente e PSK), na mesma taxa de bit e mesma energia de sinal por bit.

5. Sistemas QPSK transmitem, em uma dada largura de faixa, duas vezes mais bits de informação que um sistema PSK coerente binário. Para altos valores de E_b/N_0, as taxas de erro de ambos sistemas são muito próximas. Entretanto, QPSK é mais complexo.

10. Compromissos na Transmissão de Dados M-ários

Teorema da capacidade de canal de Shannon:

Em um canal de comunicações limitado em faixa, que é perturbado por ruído gaussiano branco e aditivo (AWGN) e que está sujeito a uma limitação de potência, a capacidade de canal C é definida por:

$$C = B \log_2(1 + SNR) \qquad \text{[bit/s]}$$

B = largura de faixa do canal [Hz]

SNR = razão sinal/ruído recebido.

A capacidade de canal define um limite superior para a taxa de transmissão na qual a informação pode ser transmitida pelo canal sem erro.

Seja

$N_0/2$ = densidade espectral de potência bilateral do ruído

T_b = duração de um bit em segundos

$R_b = 1/T_b$ = taxa de bit

Potência média do sinal recebido = $P = E_b/T_b = E_b R_b$

Na largura de faixa B, a potência média de ruído = $N_0 B$.

Então, a razão sinal-ruído recebida é dada por:

$$SNR = \frac{E_b R_b}{N_0 B} = \frac{E_b / N_0}{B / R_b}$$

E_b/N_0 é razão energia de sinal por bit pela potência média de ruído por unidade de largura de faixa e R_b/B é a eficiência de faixa.

Como C define um limite superior para a taxa de bit, ou seja, $R_b \leq C$, portanto:

$$\frac{R_b}{B} \leq \log_2\left(1 + \frac{E_b/N_0}{B/R_b}\right)$$

ou de forma equivalente,

$$\boxed{\frac{E_b}{N_0} \leq \frac{2^{R_b/B} - 1}{R_b/B}}$$

Note que para uma dada eficiência de faixa R_b/B, a razão energia de sinal recebida por bit pela densidade espectral de potência de ruído deve satisfazer a relação acima para se ter transmissão de informação pelo canal livre de erro.

Se $B \rightarrow \infty$, então $R_b/B \rightarrow 0$ e $E_b/N_0 \rightarrow \log_e 2 = 0.693$ (– 1,6 dB) Limite de Shannon

Gráfico R_b/B versus E_b/N_0 [dB] para PSK M-ários parametrizado em $P_e = 10^{-5}$:

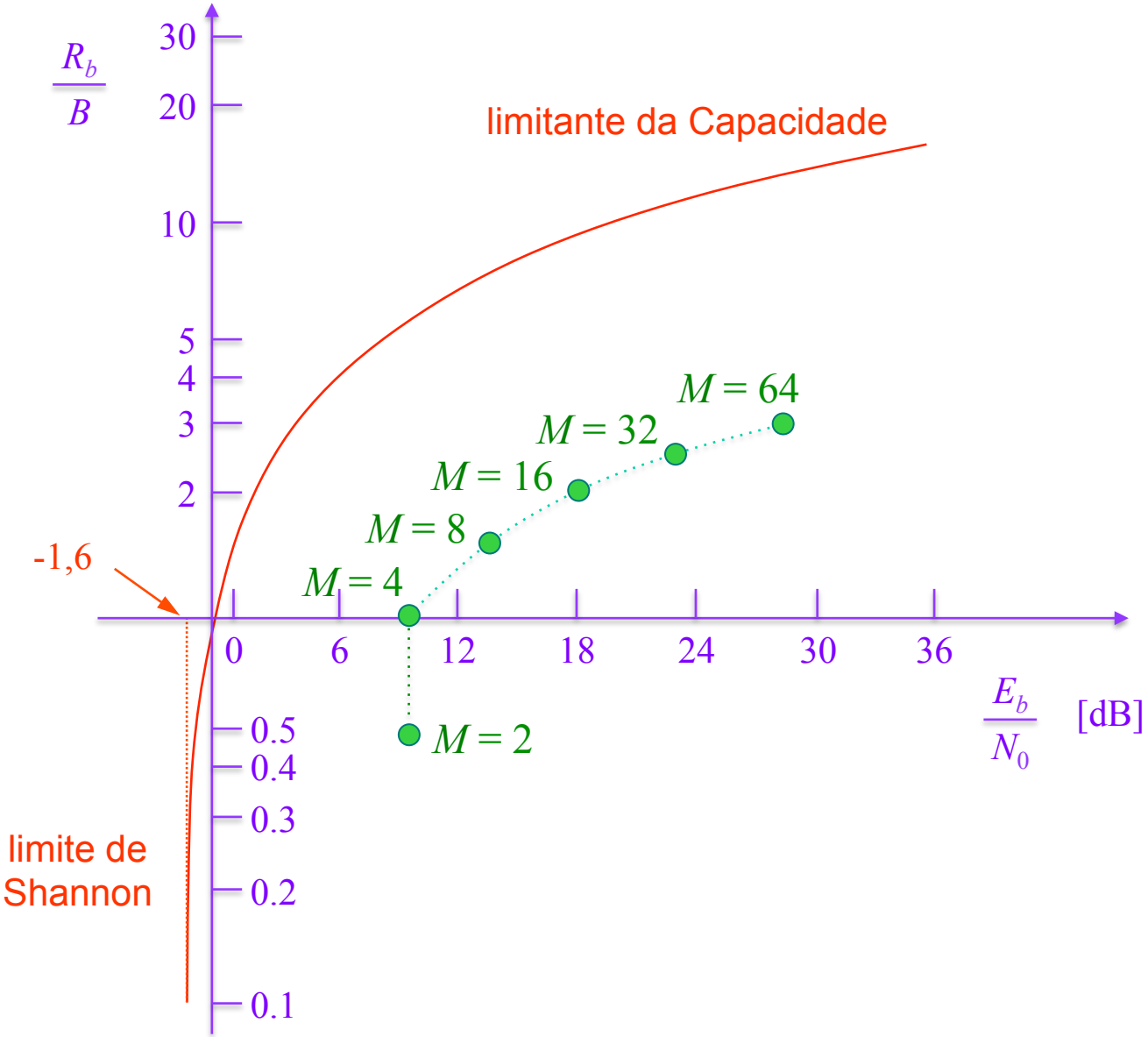
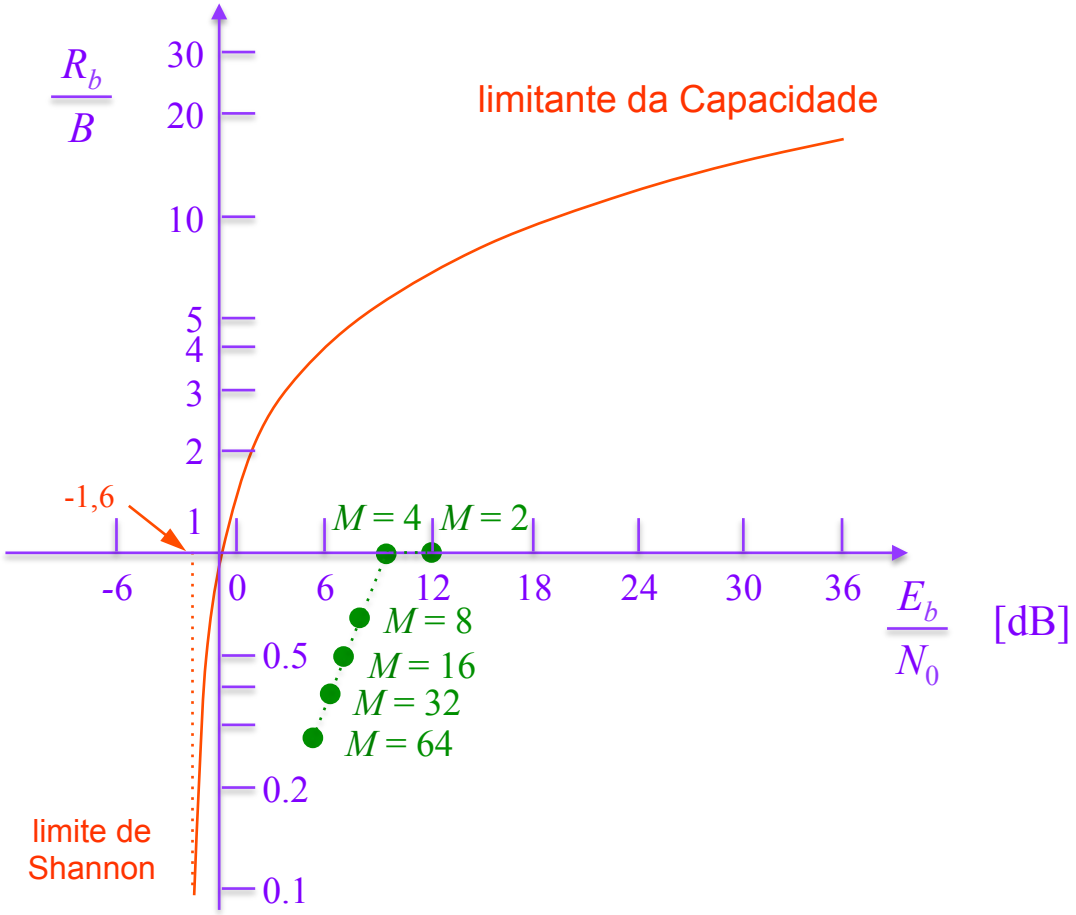


Gráfico R_b/B versus E_b/N_0 [dB] para FSK M-ários parametrizado em $P_e = 10^{-5}$:



Assumimos neste gráfico que a separação entre as frequências das M senóides é o mínimo necessário para que elas sejam ortogonais entre si no intervalo de sinalização.

Compromissos na utilização de sinalização M-ária:

a) Para PSK M-ário, quando o número M de fases aumenta, a eficiência de faixa melhora mas às custas de um aumento na energia de sinal por bit (para $M > 4$).

b) Para FSK M-ário, quando o número M de frequências aumenta, a energia de sinal por bit diminui mas às custas de uma redução na eficiência de faixa (para $M > 4$).