# EXERCíCIOS – CAPÍTULOS 5 E 6

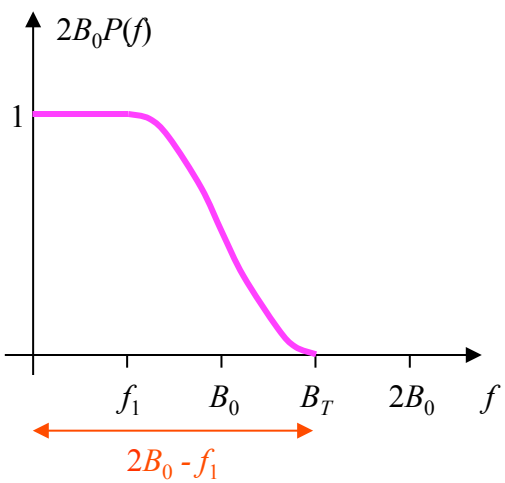
1. Uma onda PAM binária é transmitida por um canal banda base com uma largura de faixa máxima de 75 kHz. A duração do bit é de 10 μs. Encontre o espectro cosseno levantado que satisfaz estes requisitos.

$$B_T = 2B_0 - f_1 = 75 \text{ kHz}$$

$$B_0 = 1/2T_b = 1/(2\times10\times10^{-6}) = 50 \text{ kHz}$$

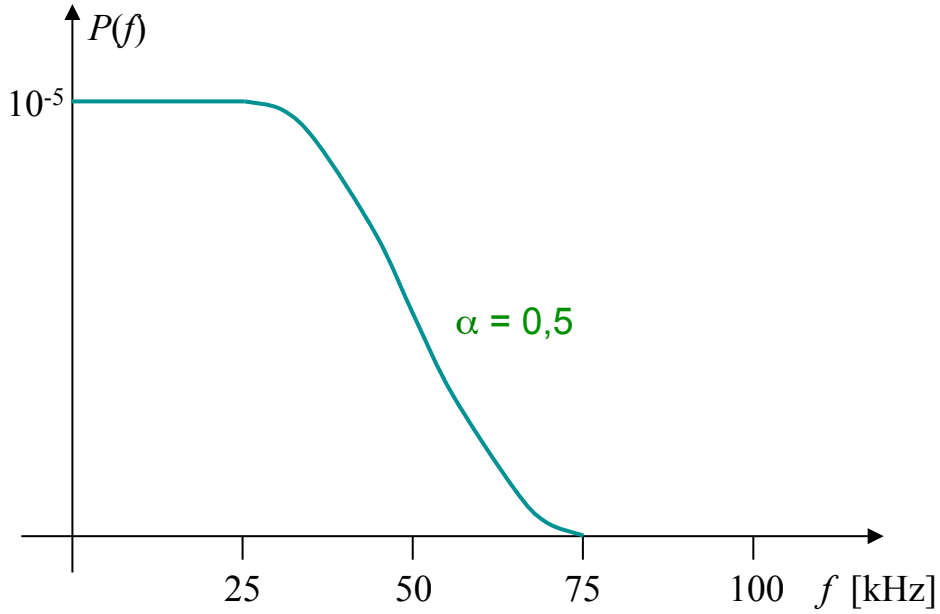
$$f_1 = 2B_0 - B_T = 2\times50 - 75 = 25 \text{ kHz}$$

$$\alpha = 1 - f_1/B_0 = 1 - 25/50 = 0{,}5$$



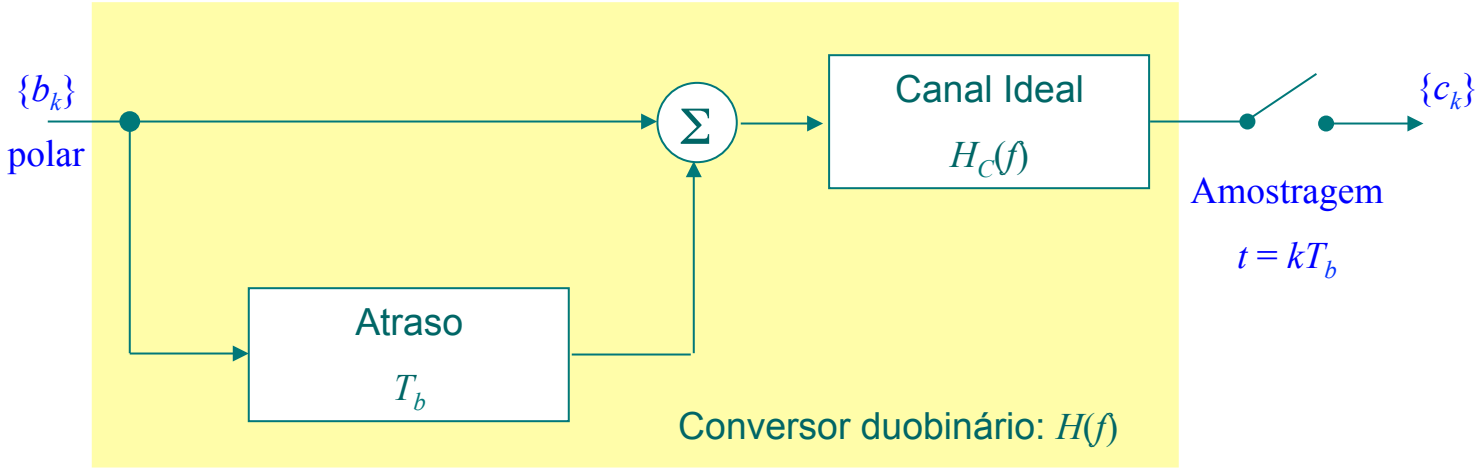

$$P(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2B_0} & 0 \le |f| < f_1 \\ \dfrac{1}{4B_0}\left\{1+\cos\left[\dfrac{\pi\left(|f|-f_1\right)}{2B_0-2f_1}\right]\right\} & f_1 \le |f| < 2B_0 - f_1 \\ 0 & 2B_0 - f_1 \le |f| \end{cases}$$

$$P(f)=\begin{cases}10^{-5} & 0\le|f|<25\text{ kHz}\\ 5\times10^{-6}\left\{1+\cos\left[\dfrac{\pi\left(|f|-2{,}5\times10^{4}\right)}{5\times10^{4}}\right]\right\} & 25\text{ kHz}_1\le|f|<75\text{ kHz}_1\\ 0 & 75\text{ kHz}\le|f|\end{cases}$$




$$\alpha=1-\frac{f_1}{B_0}=1-\frac{25}{50}=0{,}5$$

2. A sequência binária 0 0 1 1 0 1 0 0 1 foi aplicada na entrada de um sistema duobinário.



a) Obtenha a saída do codificador duobinário e correspondente saída do decodificador, sem pré-codificação.

Codificação: $c_k = b_k + b_{k-1}$ Decodificação: $\hat{b}_k = \hat{c}_k - \hat{b}_{k-1}$

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sequência binária de entrada $\{b_k\}$: | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| representação polar da seq. $\{b_k\}$: | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| saída do codificador duobinário $\{c_k\}$: | | -2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 |
| entrada do decodificador $\{\hat{c}_k\}$: | | -2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 |
| sequência polar decodificada $\{\hat{b}_k\}$: | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| sequência binária decodificada $\{\hat{b}_k\}$: | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

b) Suponha que ocorreu um erro na transmissão, onde o nível da entrada produzida pelo segundo dígito é reduzido a zero. Obtenha a saída do receptor.

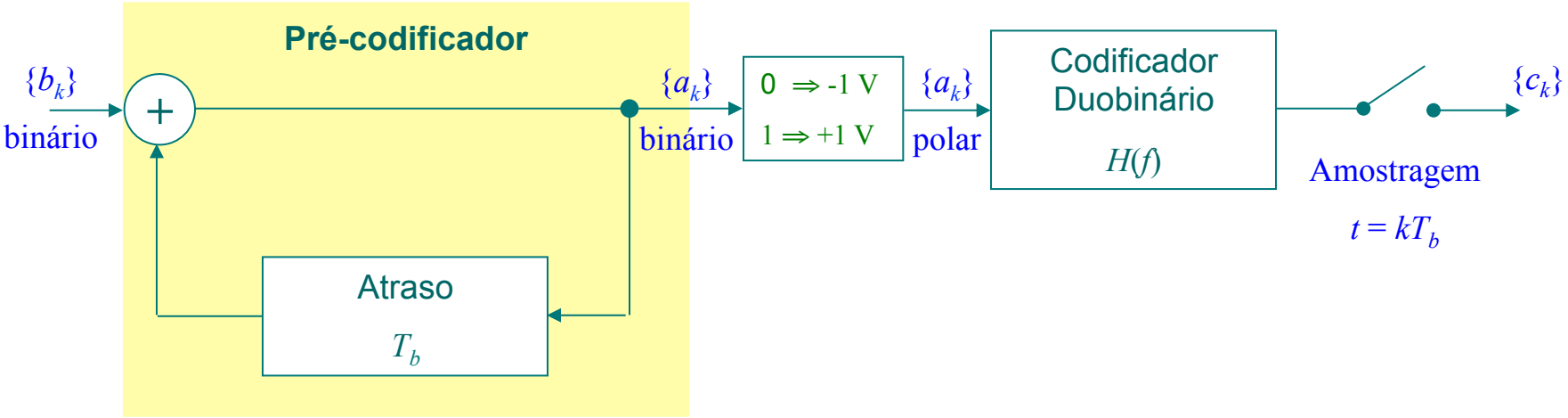
| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sequência binária de entrada $\{b_k\}$: | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| representação polar da seq. $\{b_k\}$: | -1 | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| saída do codificador duobinário $\{c_k\}$: | | -2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 |
| entrada do decodificador $\{\hat{c}_k\}$: | | **0** | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 |
| sequência polar decodificada $\{\hat{b}_k\}$: | -1 | **1** | **-1** | 1 | -1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| sequência binária decodificada $\{\hat{b}_k\}$: | 0 | **1** | **0** | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

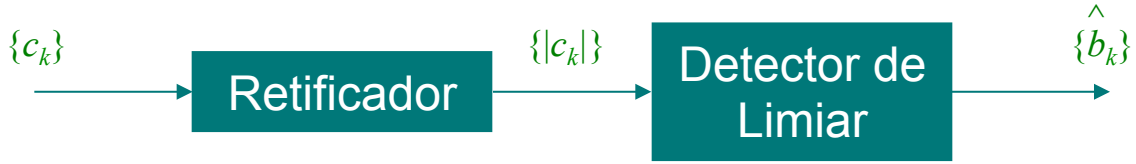
erro

Obs.: Há propagação do erro!

3. A sequência binária 0 0 1 1 0 1 0 0 1 foi aplicada na entrada de um sistema duobinário.

a) Obtenha a saída do codificador duobinário e correspondente saída do decodificador, com pré-codificação.



a) Obtenha a saída do codificador duobinário e correspondente saída do decodificador, com pré-codificação.

$$a_k = b_k \oplus a_{k-1}$$

$$c_k = a_k + a_{k-1}$$

$$\hat{b}_k = \begin{cases} \text{símbolo } 0 & \text{se } |c_k| > 1V \\ \text{símbolo } 1 & \text{se } |c_k| \leq 1V \end{cases}$$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sequência binária de entrada $\{b_k\}$: | | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| seq. binária pré-codificada $\{a_k\}$: | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| representação polar da seq. $\{a_k\}$: | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 |
| saída do cod. duobinário $\{c_k\}$: | | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | -2 | -2 | 0 |
| entrada do decodificador $\{\hat{c}_k\}$: | | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | -2 | -2 | 0 |
| sequência binária decod. $\{\hat{b}_k\}$: | | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

b) Suponha que ocorreu um erro na transmissão, onde o nível da entrada produzida pelo segundo dígito é reduzido a zero. Obtenha a saída do receptor.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sequência binária de entrada $\{b_k\}$: | | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| seq. binária pré-codificada $\{a_k\}$: | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| representação polar da seq. $\{a_k\}$: | +1 | +1 | +1 | -1 | +1 | +1 | -1 | -1 | -1 | +1 |
| saída do cod. duobinário $\{c_k\}$: | | 2 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 | -2 | -2 | 0 |
| entrada do decodificador $\{\hat{c}_k\}$: | | 2 | **0** | 0 | 0 | 2 | 0 | -2 | -2 | 0 |
| sequência binária decod. $\{\hat{b}_k\}$: | | 0 | **1** | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

erro

Obs.: Não há propagação do erro!

4. Determine o limiar que leva a uma probabilidade de erro mínima.

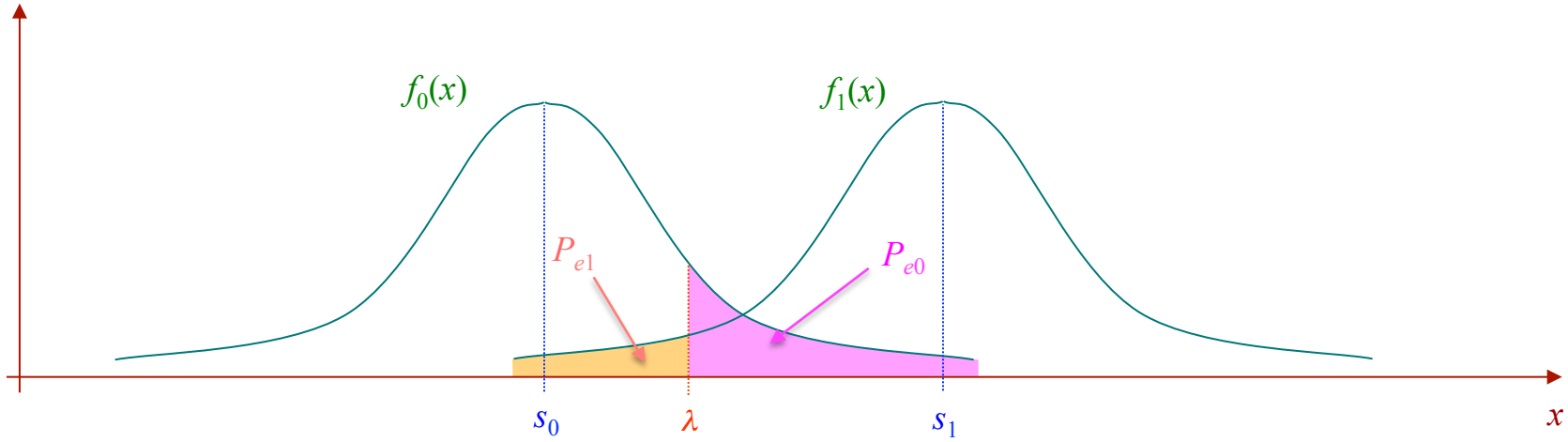
Dados:

Probabilidades a priori: $P(s_0) = p$ e $P(s_1) = q$

$H_0$: $x(t) = s_0(t) + w(t)$

$H_1$: $x(t) = s_1(t) + w(t)$

Ruído gaussiano branco aditivo com média = 0 e variância = $\sigma^2$



Probabilidade média de erro é dada por:

$$P_e = P(s_0)P(H_1 / s_0) + P(s_1)P(H_0 / s_1)$$

$$P_e = p\int_{Z_1} f_0(\mathbf{x})d\mathbf{x} + q\int_{Z_0} f_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

Quando uma observação cai em $Z_0$ escolhemos $H_0$ e quando a observação cai em $Z_1$ escolhemos $H_1$.

$$P_e = p\int_{Z-Z_0} f_0(\mathbf{x})d\mathbf{x} + q\int_{Z_0} f_1(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

$$P_e = p + \int_{Z_0}\left[qf_1(\mathbf{x}) - pf_0(\mathbf{x})\right]d\mathbf{x}$$

$$P_e = p + \int_{-\infty}^{\lambda}\left[qf_1(\mathbf{x}) - pf_0(\mathbf{x})\right]d\mathbf{x}$$

Para achar o $\lambda_0$ que minimiza a $P_e$ fazemos:

$$\frac{dP_e}{dx} = 0$$

$$\frac{dP_e}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{p + \int_{-\infty}^{\lambda}\left[qf_1(x) - pf_0(x)\right]dx\right\} = 0$$

$$qf_1(\lambda_0) - pf_0(\lambda_0) = 0$$

$$\frac{f_1(\lambda_0)}{f_0(\lambda_0)} = \frac{p}{q}$$

$$\frac{\exp\left(-\frac{(\lambda_0 - s_1)^2}{2\sigma^2}\right)}{\exp\left(-\frac{(\lambda_0 - s_0)^2}{2\sigma^2}\right)} = \frac{p}{q}$$

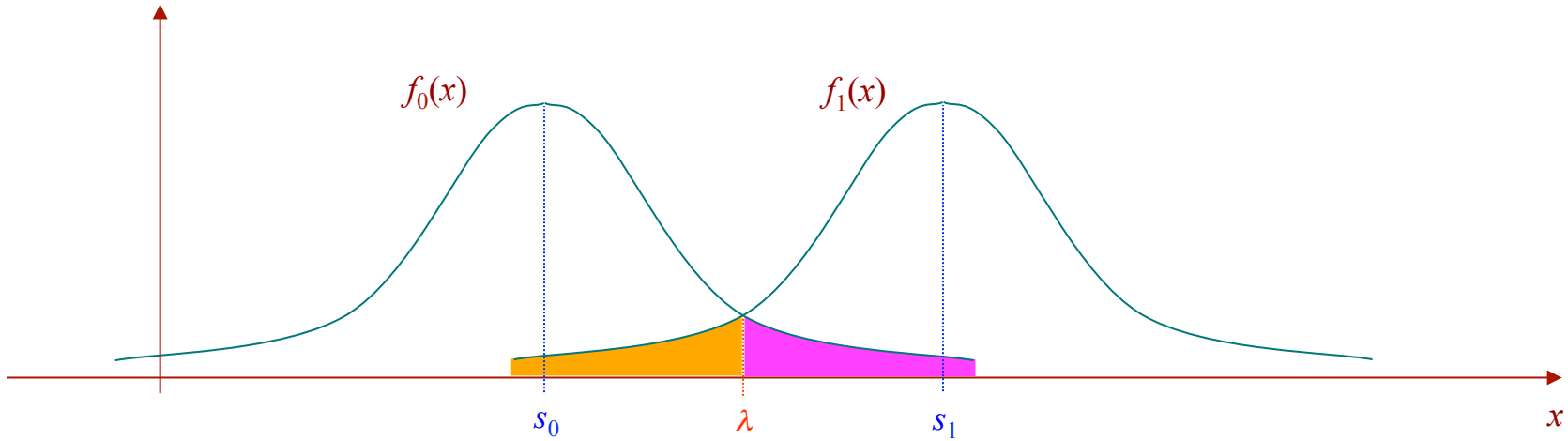
$$-\frac{\left(\lambda_0 - s_1\right)^2}{2\sigma^2} + \frac{\left(\lambda_0 - s_0\right)^2}{2\sigma^2} = \ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$\lambda_0 \frac{\left(s_1 - s_0\right)}{\sigma^2} + \frac{\left(s_0^2 - s_1^2\right)}{2\sigma^2} = \ln\left(\frac{p}{q}\right)$$

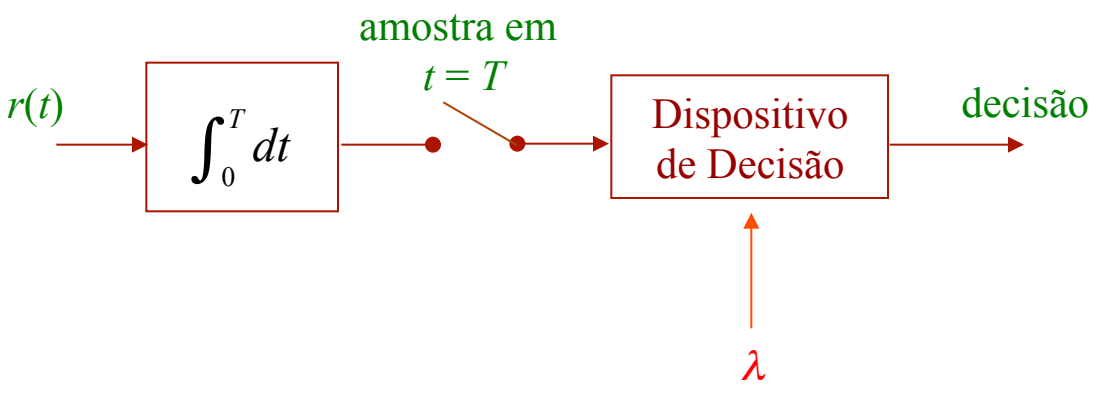
$$\boxed{\lambda_0 = \frac{\left(s_1 + s_0\right)}{2} + \frac{\sigma^2}{\left(s_1 - s_0\right)} \ln\left(\frac{p}{q}\right)}$$

Se $p = q$, temos:

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{\left(s_1 + s_0\right)}{2}}$$



5. Sinalização bipolar $+A$ e $-A$ de duração $T$. Ruído AWGN com $\sigma^2 = 0{,}1$.




Determine o limiar ótimo para as probabilidades a priori de $+A$ $= 0{,}5$; $0{,}7$ e $0{,}2$.

$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = +A & 0 \le t \le T \quad \text{para } 1 \\ s_2(t) = -A & 0 \le t \le T \quad \text{para } 0 \end{cases}$$

Saída do integrador no final do intervalo de sinalização:

$$z(T) = \int_0^T \left[ s_i(t) + n(t) \right] dt = \begin{cases} +AT + n_0 & \text{para } 1 \\ -AT + n_0 & \text{para } 0 \end{cases}$$

$$n_0 = \int_0^T n(t)\, dt$$

a) $P(s_1) = P(s_2) = 0{,}5$; limiar ótimo:

$$\lambda_0 = \frac{+AT + (-AT)}{2} = 0$$

b) $P(s_1) = 0{,}7$ e $P(s_2) = 0{,}3$; limiar ótimo:

$$\lambda_0 = \frac{(s_1 + s_2)}{2} + \frac{\sigma^2}{(s_1 - s_2)} \ln\left(\frac{P(s_2)}{P(s_1)}\right)$$

$$= \frac{+AT + (-AT)}{2} + \frac{0{,}1}{(AT + AT)} \ln\left(\frac{0{,}3}{0{,}7}\right)$$

$$= -\frac{0{,}04}{AT}$$

c) $P(s_1) = 0{,}2$ e $P(s_2) = 0{,}8$; limiar ótimo:

$$\lambda_0 = \frac{(s_1 + s_2)}{2} + \frac{\sigma^2}{(s_1 - s_2)} \ln\left(\frac{P(s_2)}{P(s_1)}\right)$$

$$= \frac{0{,}1}{2AT} \ln\left(\frac{0{,}8}{0{,}2}\right) = \frac{0{,}07}{AT}$$

## Observação:

Função erro complementar: $\mathrm{erfc}(u) = 1 - \mathrm{erf}(u)$

$$\mathrm{erfc}\left(u\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} \exp\left(-z^2\right) dz$$

Função erro complementar: $Q(u) = 1/2 - \mathrm{erf}(u)$ ou $\mathrm{erfc}\left(u\right) = 2Q\left(\sqrt{2}u\right)$

$$Q\left(u\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

Aproximação para $u >> 1$ $(> 4)$:

$$Q\left(u\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)$$

6. Calcule a probabilidade de erro de bit no problema anterior.

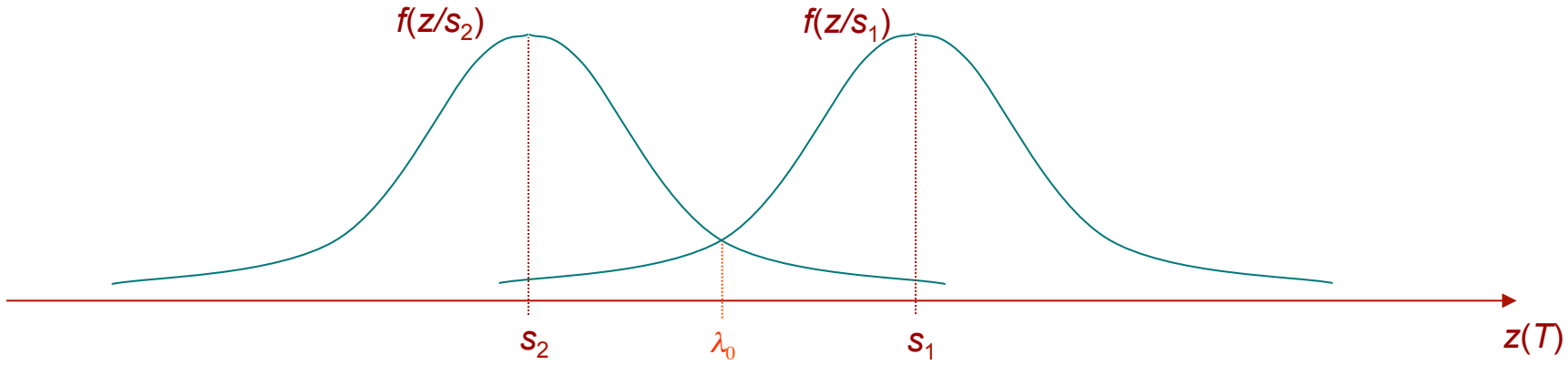
$$n_0 = \int_0^T n(t)\,dt$$

Então,

$$E\left[n_0\right] = E\left[\int_0^T n(t)\,dt\right] = \int_0^T E\left[n(t)\right]dt = 0$$

$$\sigma^2 = E\left[n_0^2\right] = E\left[\left(\int_0^T n(t)\,dt\right)^2\right] = \int_0^T \int_0^T E\left[n(t)n(\tau)\right]dt\,d\tau$$

$$= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2}\delta(t-\tau)\,dt\,d\tau = \frac{N_0}{2}\int_0^T d\tau = \frac{N_0}{2}T$$




Comete-se erro quando o limiar é ultrapassado:

$$\lambda_0 = \frac{s_1 + s_2}{2}$$

Portanto,

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\lambda_0}^{\infty} \exp\left[\frac{-\left(z - s_2\right)^2}{2\sigma^2}\right] dz$$

Mudança de variável: $y = (z - s_2)/\sigma$:

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{s_1 - s_2/2\sigma}^{\infty} \exp\left[\frac{-y^2}{2}\right] dy$$

Logo,

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{s_1 - s_2/2\sigma}^{\infty} \exp\left[\frac{-y^2}{2}\right] dy$$

$$= Q\left(\frac{s_1 - s_2}{2\sigma}\right)$$

Como $s_1 - s_2 = 2AT$, temos

$$P_e = Q\left(\frac{2AT}{2\sqrt{\frac{N_0 T}{2}}}\right) = \boxed{Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{N_0}}\right)}$$

7. Um sistema binário utiliza pulsos da forma:

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) = A\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi t}{T}\right) & 0 \le t \le T \\ s_2(t) = -A\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi t}{T}\right) & 0 \le t \le T \end{cases}$$

Determine a probabilidade de erro, sendo $A = 0{,}2$ mV e $T = 2$ μs, o ruído AWGN com densidade espectral de potência bilateral = $10^{-15}$ W/Hz. Os bits transmitidos são equiprováveis.

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

## Energia média transmitida:

$$E = \frac{1}{2}\int_0^T s_1^2(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^T s_2^2(t)\,dt = \int_0^T s_1^2(t)\,dt$$

$$= \int_0^T A^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{T}\right)dt = A^2 T$$

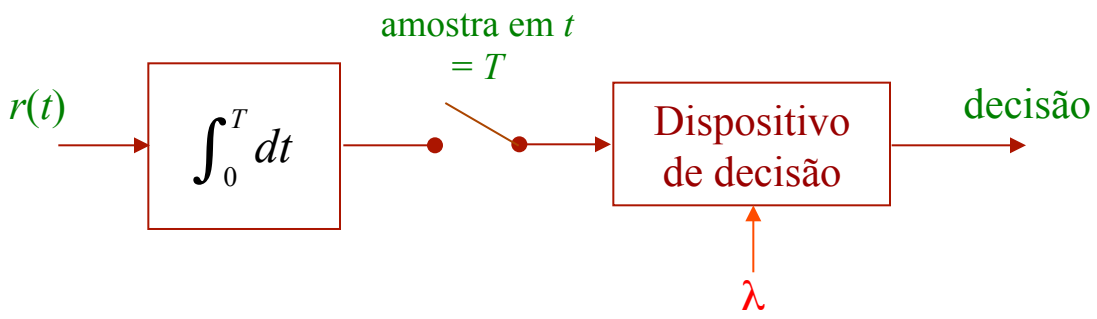
## Probabilidade de erro:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{A^2 T}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{\left(2\times 10^{-4}\right)^2 2\times 10^{-6}}{4\times 10^{-15}}}\right)$$

$$= Q\left(\sqrt{20}\right) = 3{,}9\times 10^{-6}$$

8. No um sistema binário abaixo, com sinalização bipolar $+A$ e $-A$ de duração $T$.

Ruído AWGN com $\sigma^2 = 0{,}1$, temos:




$P(s_1) = P(s_2) = 1/2$ , $N_0/2 = 10^{-9}$ W/Hz e $A = 10$ mV e taxa de transmissão de $10^4$ bit/s.

a) Encontre a probabilidade de erro.

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{0{,}01^2 \times 10^{-4}}{10^{-9}}}\right) = Q\left(\sqrt{10}\right) = \boxed{7{,}8 \times 10^{-4}}$$

b) Se a taxa de bit é aumentada para $10^5$ bit/s, que valor de $A$ deve ser usado para manter a mesma probabilidade de erro de bit?

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2T}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{10}\right) = 7{,}8 \times 10^{-4}$$

$$\frac{2A^2T}{N_0} = 10$$

$$\frac{A^2 10^{-5}}{10^{-9}} = 10 \Rightarrow \boxed{A = 31{,}62 \text{ mV}}$$