Problemas

2.1

(a) Encontre a transformada de Fourier do pulso de semiciclo de cosseno mostrado na Figura P2.1*a*.

(b) Aplique a propriedade de deslocamento no tempo ao resultado obtido na parte (a) para avaliar o espectro do pulso de semiciclo de seno da Figura P2.1*b*.

(c) Qual é o espectro do pulso de semiciclo de seno que tem duração igual a aT?

(d) Qual é o espectro do pulso de semiciclo de seno negativo mostrado na Figura P2.1*c*?

(e) Encontre o espectro do pulso de seno simples mostrado na Figura P2.1*d*.

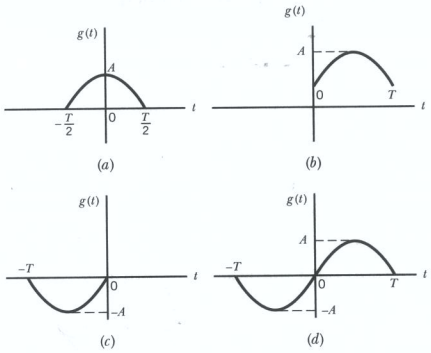

Figura P2.1

2.2 Avalie a transformada de Fourier da onda senoidal amortecida

$$g(t) = \exp(-t)\operatorname{sen}(2\pi f_c t)u(t)$$

em que $u(t)$ é a função degrau unitário.

2.3 Qualquer função $g(t)$ pode ser separada de maneira única em uma *parte par* e uma *parte ímpar*, como mostrado por

$$g(t) = g_e(t) + g_o(t)$$

A parte par é definida por

$$g_e(t) = \frac{1}{2}[g(t) + g(-t)]$$

e a parte ímpar é definida por

$$g_o(t) = \frac{1}{2}[g(t) - g(-t)]$$

(a) Avalie as partes par e ímpar de um pulso retangular definido por

$$g(t) = A\,\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)$$

(b) Quais são as transformadas de Fourier dessas duas partes do pulso?

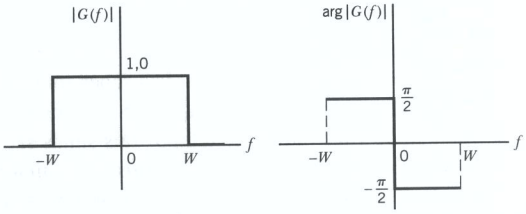

Figura P2.4

2.4 Determine a transformada de Fourier inversa da função da frequência $G(f)$ definida pelos espectros de magnitude e de fase mostrados na Figura P2.4.

2.5 A expressão seguinte pode ser vista como uma representação aproximada de um pulso com tempo de subida finito:

$$g(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t-T}^{t+T} \exp\left(-\frac{\pi u^2}{\tau^2}\right)du$$

em que se assume que $T >> \tau$. Determine a transformada de Fourier de $g(t)$. O que acontece a essa transformada quando τ se torna zero? *Dica*: expresse $g(t)$ como a superposição de dois sinais, um correspondendo à integração de $t - T$ a 0, e o outro de 0 a $t + T$.

2.6 A transformada de Fourier de um sinal $g(t)$ é denotada por $G(f)$. Prove as seguintes propriedades da transformada de Fourier:

(a) Se um sinal de valor real $g(t)$ for uma função par do tempo t, a transformada de Fourier $G(f)$ é puramente real. Se o sinal $g(t)$ for uma função ímpar do tempo t, a transformada de Fourier $G(f)$ é puramente imaginária.

(b)

$$t^n g(t) \rightleftharpoons \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n G^{(n)}(f)$$

em que $G^{(n)}(f)$ é a n-ésima derivada de $G(f)$ em relação a f.

(c)

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n g(t)\,dt = \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n G^{(n)}(0)$$

(d)

$$g_1(t)g_2^*(t) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda)G_2^*(\lambda - f)\,d\lambda$$

(e)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f)G_2^*(f)\,df$$

2.7 A transformada de Fourier $G(f)$ de um sinal $g(t)$ é limitada pelas três desigualdades seguintes:

$$|G(f)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt$$

$$|j2\pi f G(f)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{dg(t)}{dt}\right| dt$$

e

$$|(j2\pi f)^2 G(f)| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^2 g(t)}{dt^2}\right| dt$$

em que se assume que a primeira e a segunda derivadas de $g(t)$ existem.

Construa esses três limites para o pulso triangular mostrado na Figura P2.7 e compare os seus resultados com o espectro de magnitude real do pulso.

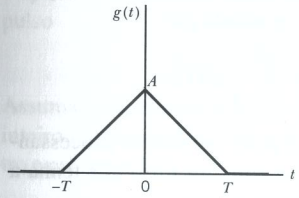

Figura P2.7

2.8 Prove as seguintes propriedades do processo de convolução:

(a) A propriedade comutativa:

$$g_1(t) \star g_2(t) = g_2(t) \star g_1(t)$$

(b) A propriedade associativa:

$$g_1(t) \star [g_2(t) \star g_3(t)] = [g_1(t) \star g_2(t)] \star g_3(t)$$

(c) A propriedade distributiva:

$$g_1(t) \star [g_2(t) + g_3(t)] = g_1(t) \star g_2(t) + g_1(t) \star g_3(t)$$

2.9 Considere a convolução de dois sinais $g_1(t)$ e $g_2(t)$. Mostre que

(a)

$$\frac{d}{dt}[g_1(t) \star g_2(t)] = \left[\frac{d}{dt}g_1(t)\right] \star g_2(t)$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{t} [g_1(\tau) \star g_2(\tau)]d\tau = \left[\int_{-\infty}^{t} g_1(\tau)d\tau\right] \star g_2(t)$$

2.10 Um sinal $x(t)$ de energia finita é aplicado a um dispositivo de lei quadrática cuja saída $y(t)$ é definida por

$$y(t) = x^2(t)$$

O espectro de $x(t)$ é limitado ao intervalo de frequências $-W \le f \le W$. A partir disso, mostre que o espectro de $y(t)$ é limitado a $-2W \le f \le 2W$. *Dica*: Expresse $y(t)$ como $x(t)$ multiplicado por ele mesmo.

2.11 Avalie a transformada de Fourier da função delta considerando-a como a forma limite de (1) um pulso retangular de área unitária, e de (2) um pulso sinc de área unitária.

2.12 A transformada de Fourier $G(f)$ de um sinal $g(t)$ é definida por

$$G(f) = \begin{cases} 1, & f > 0 \\ \frac{1}{2}, & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases}$$

Determine o sinal $g(t)$.

2.13 Mostre que os dois pulsos diferentes definidos nas partes (*a*) e (*b*) da Figura P2.1 tem a mesma densidade espectral de energia:

$$\varepsilon_g(f) = \frac{4A^2T^2\cos^2(\pi T f)}{\pi^2(4T^2f^2 - 1)^2}$$

2.14

(a) O *valor quadrático médio* (rms) *de largura de banda* de um sinal passa-baixas $g(t)$ é definido por

$$W_{\text{rms}} = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2|G(f)|^2\,df}{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\,df}\right]^{1/2}$$

em que $|G(f)|^2$ é a densidade espectral de energia do sinal. De maneira correspondente, o *valor quadrático médio* (rms) *de duração* do sinal é definido por

$$T_{\text{rms}} = \left[\frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |g(t)|^2 \, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \, dt} \right]^{1/2}$$

Utilizando essas definições, mostre que

$$T_{\text{rms}} W_{\text{rms}} \geq \frac{1}{4\pi}$$

Assuma que $|g(t)| \to 0$ mais rápido do que $1\sqrt{|t|}$ quando $|t| \to \infty$.

(b) Considere o pulso gaussiano definido por

$$g(t) = \exp(-\pi t^2)$$

Mostre que, para esse sinal, a igualdade

$$T_{\text{rms}} W_{\text{rms}} \equiv \frac{1}{4\pi}$$

pode ser alcançada.

Dica: Utilize a desigualdade de Schwarz:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [g_1^*(t) g_2(t) + g_1(t) g_2^*(t)] dt \right\}^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |g_1(t)|^2 \, dt \times \int_{-\infty}^{\infty} |g_2(t)|^2 \, dt$$

em que designamos

$$g_1(t) = t g(t)$$

e

$$g_2(t) = \frac{dg(t)}{dt}$$

2.15 Sejam $x(t)$ e $y(t)$ os sinais de entrada e de saída de um filtro linear invariante no tempo. Utilizando o teorema de Rayleigh da energia, mostre que se o filtro for estável e o sinal de entrada $x(t)$ tiver energia finita, então o sinal de saída $y(t)$ também terá energia finita. Isto, dado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt < \infty$$

então mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 \, dt < \infty$$

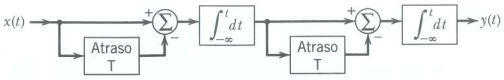

Figura P2.16

2.16 Avalie a função de transferência do sistema linear representado pelo diagrama de blocos mostrado na Figura P2.16.

2.17

(a) Determine a resposta em magnitude total da conexão em cascata mostrada na Figura P2.17 que consiste em N estágios idênticos, cada um com uma constante de tempo RC igual a τ_0.

(b) Mostre que quando N se aproxima do infinito, a resposta em magnitude da conexão em cascata se aproxima de uma função gaussiana $\exp\left(-\frac{1}{2} f^2 T^2\right)$, em que para cada valor de N, a constante de tempo τ_0 é tal que

$$\tau_0^2 = \frac{T^2}{4\pi^2 N}$$

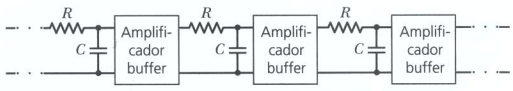

Figura P2.17

2.18 Suponha que, para um dado sinal $x(t)$, o valor integrado do sinal sobre um intervalo de tempo T seja requerido, como mostrado por

$$y(t) = \int_{t-T}^{T} x(\tau) \, d\tau$$

(a) Mostre que $y(t)$ pode ser obtido processando-se o sinal $x(t)$ com um filtro que tenha a função de transferência

$$H(f) = T \operatorname{sinc}(fT) \exp(-j\pi f T)$$

(b) Uma aproximação adequada para essa função de transferência é obtida utilizando-se um filtro passa-baixas com largura de banda igual a $1/T$, resposta em magnitude da banda passante T, e atraso $T/2$. Assumindo-se que esse filtro passa-baixas seja criado pela combinação de um circuito RC seguido de um ganho de T, determine a saída do filtro no instante $t = T$ em decorrência de uma função degrau unitário aplicada ao filtro no instante $t = 0$ e compare o resultado com a saída correspondente de um integrador ideal.

2.19 Um filtro TDL consiste em N pesos, em que N é ímpar. Ele é simétrico em relação ao *tap* central, isto é, os pesos satisfazem a condição

$$w_n = w_{N-1-n} \qquad 0 \le n \le N-1$$

(a) Encontre a resposta em magnitude do filtro.

(b) Mostre que esse filtro tem uma resposta em fase linear.

2.20 Considere um filtro passa-faixa ideal com frequência de banda média f_c e largura de banda $2B$, como definido na Figura P2.20. A onda portadora $A\cos(2\pi f_0 t)$ é repentinamente aplicada a esse filtro no instante $t = 0$. Assumindo que $|f_c - f_0|$ é grande comparado à largura de banda $2B$, determine a resposta em fase do filtro.

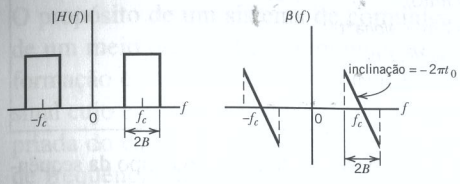

Figura P2.20

2.21 O pulso de RF retangular

$$x(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_c t), & 0 \le t \le T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

é aplicado a um filtro linear com resposta ao impulso

$$h(t) = x(T - t)$$

Assuma que a frequência f_c é igual a um múltiplo inteiro grande de $1/T$. Determine a resposta do filtro e esboce-a.

2.22 Mostre que a DFT inversa de uma sequência de impulsos constantes no domínio da frequência é uma sequência correspondente de impulsos no domínio do tempo quando o comprimento da DFT é par.

Problemas computacionais

2.23 Um pulso retangular $x(t)$ de amplitude unitária e duração T é aplicado a um filtro passa-baixas ideal de largura de banda B.

(a) Qual é a resposta ao impulso do filtro passa-baixas ideal?

(b) Determine e plote a resposta $y(t)$ do filtro para $BT = 5$, 10 e 20, utilizando o seguinte *script* em MATLAB,

```
% - - - Parâmetros de simulação - - - -
BT      = 5; % Produto BT
T       = 1;
B       = BT/T;
Delta_t = T/100;
t       = [2 6*T: Delta_t: 6*T];

% - - - Pulso de amplitude unitária e duração T- -
x       = zeros(size(t));
index   = find (abs(t) <T/2);
x(index) = 1;

% - - - Resposta ao impulso (truncada) do filtro ideal - - -
t1 = [−3*T: Delta_t: 3*T];
h = 2*B*sinc(2*B*t1);

% - - - Resposta do filtro - - -
y = filter(h, 1, x) * Delta_t; % tem um atraso de 3T

% - - - Plotagem dos resultados (removendo-se o atraso) - - - -
subplot(2,1,1), plot(t,x), axis ([−T T −0.25 1.25]), grid on;
subplot(2,1,2), plot(t − 3*T, y), axis ([−T T −0,25 1,25]) ,
grid on;
```

(c) Prepare uma tabela com colunas de BT, a frequência de oscilação da resposta, e o percentual de sobre-sinal (*overshoot*).

(d) Repita o experimento para o caso de $BT = 100$, mas varie o período de amostragem Δt. O que é observado? Adicione o valor $BT = 100$ à tabela da parte (c). Tire conclusões a partir da tabela.

2.24 Repita o experimento do Problema 2.23 utilizando uma entrada que consiste em um pulso de cosseno deslocado para cima:

$$x(t) = \begin{cases} 1 + \cos\left(\dfrac{\pi t}{T}\right), & -T \le t \le T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em especial, avalie a resposta do filtro para o produto tempo-largura de banda $BT = 5$, 10, 100. Compare os resultados desse experimento com os do Problema 2.23.

2.25 Repita o experimento do Problema 2.23 utilizando uma entrada que consiste em uma onda quadrada periódica.