

PARTE II PROBABILIDADE E PROCESSOS ALEATÓRIOS

1. Introdução

Termo **Aleatório**: usado para descrever variações erráticas e imprevisíveis de um sinal observado.

Sinais em sistemas de comunicações \Rightarrow aleatórios

Sinal recebido :

- componente de informação (ex.: sinal de voz)
- componente de interferência aleatória (ex.: ondas eletromagnéticas de outros sistemas de comunicações)
- ruído recebido (ex.: ruído térmico)

Características estatísticas de sinais aleatórios \Rightarrow Teoria da Probabilidade

2. Teoria da Probabilidade

Experimento Aleatório:

- o experimento pode ser repetido sob condições idênticas,
- o resultado é sempre imprevisível,
- para um grande número de ensaios, os resultados exibem um padrão médio, isto é, uma regularidade estatística.

Exemplo: Jogar uma moeda não polarizada

Resultados possíveis: cara ou coroa



Frequência Relativa

Evento A : um dos possíveis resultados de um experimento aleatório

$n_a \Rightarrow$ número de vezes que o evento A ocorre em n experimentos

frequência relativa do evento $A = \frac{n_a}{n}$

Regularidade estatística: se para qualquer seqüência de n ensaios, a frequência relativa n_a/n converge para um mesmo limite quando n se torna grande.

Probabilidade do evento A ocorrer:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_a}{n} \right)$$

Axiomas da Probabilidade:

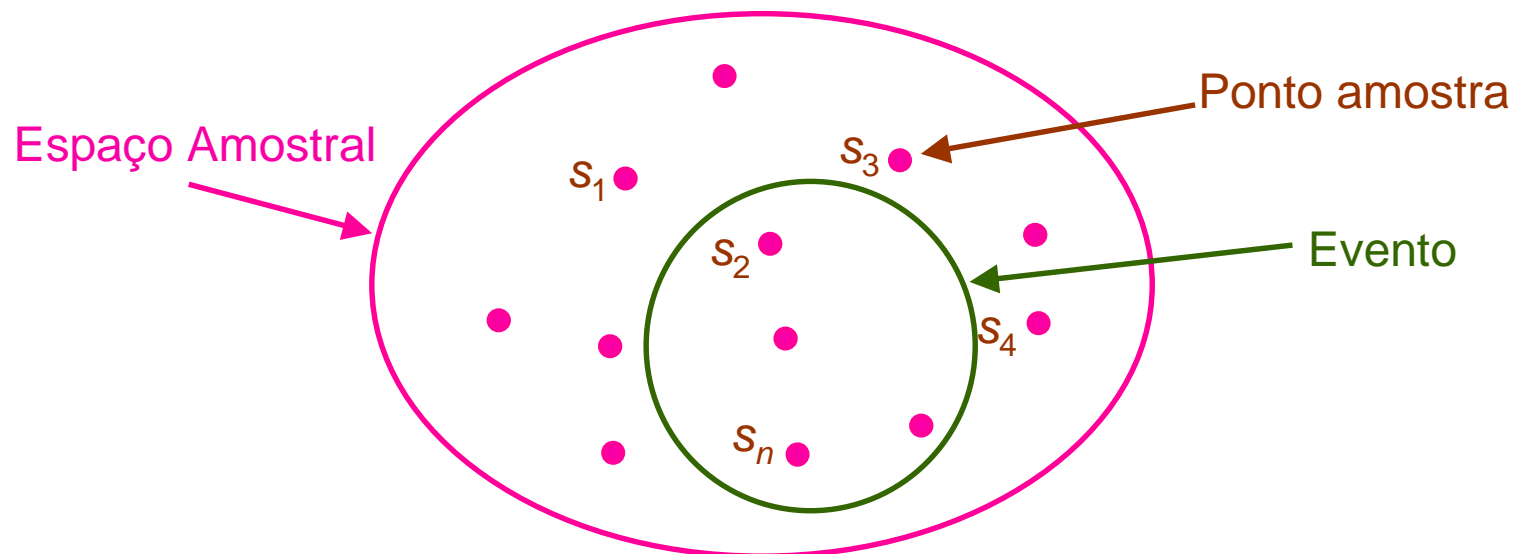
Experimento \Rightarrow Espaço

Resultados \Rightarrow Pontos

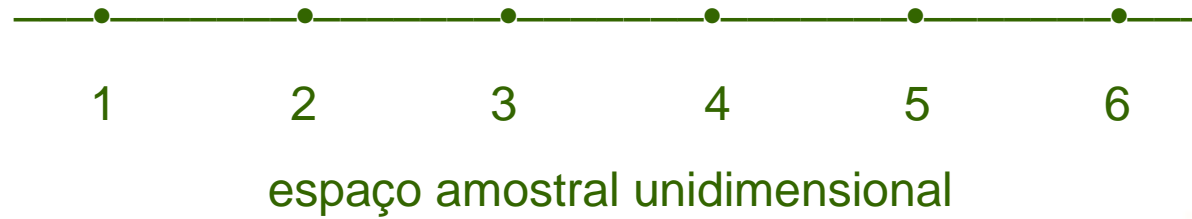
Cada resultado associamos a um ponto amostra s_k .

Todos os pontos amostra formam o espaço amostral S .

Evento: um ponto amostra ou um conjunto de pontos amostra.



Exemplo: Jogar um dado



Espaço amostral (evento certo) = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Evento elementar “número 6” = $\{6\}$

Evento “número par” = $\{2, 4, 6\}$

Evento “número maior que 6” = $\{ \}$ (evento impossível)



Sistema Probabilístico consiste de:

- ✓ Um espaço amostral S de eventos elementares,
- ✓ Uma classe E de eventos que é um subconjunto de S ,
- ✓ Uma probabilidade $P(\cdot)$ associada a cada evento A na classe E que possui as seguintes propriedades:
 - $P(S) = 1$
 - $0 \leq P(A) \leq 1$
 - Se $A+B$ é a união de dois eventos mutuamente exclusivos na classe E , então $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Propriedades Elementares da Probabilidade:

1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

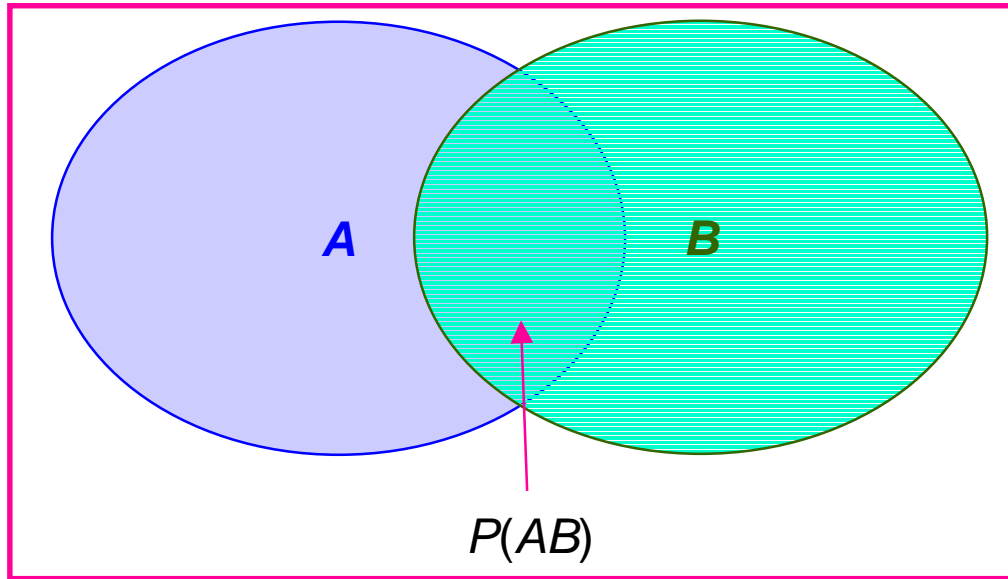
- 2) Se m eventos mutuamente exclusivos A_1, A_2, \dots, A_m possuem a propriedade $A_1 + A_2 + \dots + A_m = S$, então:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_m) = 1$$

Obs.: Quando os m eventos são equiprováveis, temos: $P(A_i) = 1/m$.

- 3) Quando os eventos A e B **não** são mutuamente exclusivos, então a probabilidade do evento união de A com B é igual a:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



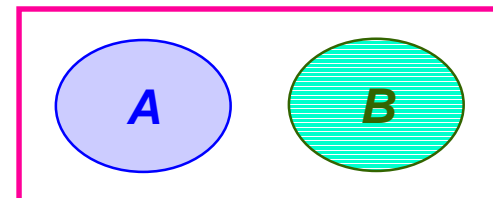
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$P(AB)$ é a probabilidade conjunta de A e B :

$$P(AB) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_{AB}}{n} \right)$$

onde $n_{AB} = n^{\circ}$ de vezes que os eventos A e B ocorrem simultaneamente em n realizações.

$P(AB) = 0 \Rightarrow$ eventos mutuamente exclusivos.



Probabilidade Condicional

$P(B/A)$ = probabilidade do evento B ocorrer dado que o evento A ocorreu:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

n_{AB} = número de vezes em que os eventos A e B ocorrem simultaneamente em n ensaios.

n_A = o número de vezes que o evento A ocorre em n ensaios.

$n_{AB}/n_A \leq 1$ representa a frequência relativa do evento B dado que A ocorreu. Então, para n grande temos:

$$P(B/A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_{AB}}{n_A} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n_{AB}/n}{n_A/n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (n_{AB}/n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (n_A/n)} = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

Então podemos re-escrever $P(B/A)$ como: $P(AB) = P(B/A)P(A)$

De forma similar, obtemos: $P(AB) = P(A/B)P(B)$

Regra de Bayes:

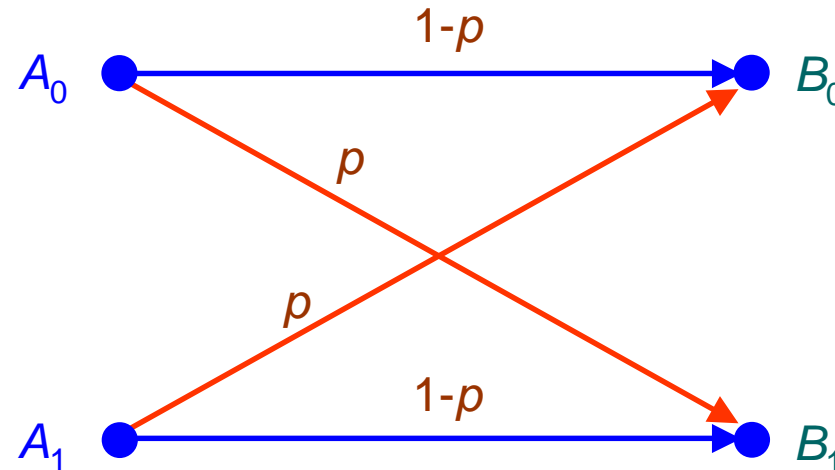
$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$$

para $P(A) \neq 0$.

Note que se $P(B/A) = P(B)$, então

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

logo $P(A/B) = P(A)$.

EXEMPLO: Canal Binário Simétrico

Probabilidades a priori de se enviar 0 ou 1:

$$A_0 = 0$$

$$P(A_0) = p_0$$

$$A_1 = 1$$

$$P(A_1) = p_1$$



Probabilidades condicionais de erro:

$P(B_1/A_0)$: Probabilidade de receber 1 dado que o 0 foi enviado

$P(B_0/A_1)$: Probabilidade de receber 0 dado que o 1 foi enviado

$$P(B_1/A_0) = P(B_0/A_1) = p$$

Probabilidades a posteriori:

$P(A_0/B_0)$: probabilidade do 0 ter sido enviado dado que o 0 foi recebido

$P(A_1/B_1)$: probabilidade do 1 ter sido enviado dado que o 1 foi recebido

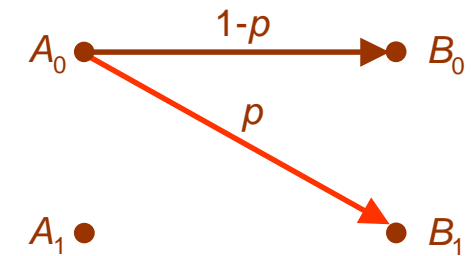
$$P(B_0/A_0) + P(B_1/A_0) = 1$$

Então,

$$P(B_0/A_0) = 1 - p$$

De modo similar:

$$P(B_1/A_1) = 1 - p$$



Assim, podemos deduzir que:

a) A probabilidade de receber o 0 é dada por:

$$P(B_0) = P(B_0/A_0)P(A_0) + P(B_0/A_1)P(A_1) = (1 - p)p_0 + pp_1$$

b) A probabilidade de receber o 1 é dada por:

$$P(B_1) = P(B_1/A_0)P(A_0) + P(B_1/A_1)P(A_1) = pp_0 + (1 - p)p_1$$

Portanto, utilizando a regra de Bayes, obtemos:

$$P(A_0/B_0) = \frac{P(B_0/A_0)P(A_0)}{P(B_0)} = \frac{(1-p)p_0}{(1-p)p_0 + pp_1}$$

$$P(A_1/B_1) = \frac{P(B_1/A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{(1-p)p_1}{pp_0 + (1-p)p_1}$$

3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Variável \Rightarrow Experimento

Valor da variável \Rightarrow Resultado do experimento

Assim, se o resultado do experimento é $s \Rightarrow$ a variável aleatória é denotada $X(s)$ ou simplesmente X .

Exemplo: Jogar um dado

Evento: mostrar os k pontos da face quando o dado é jogado

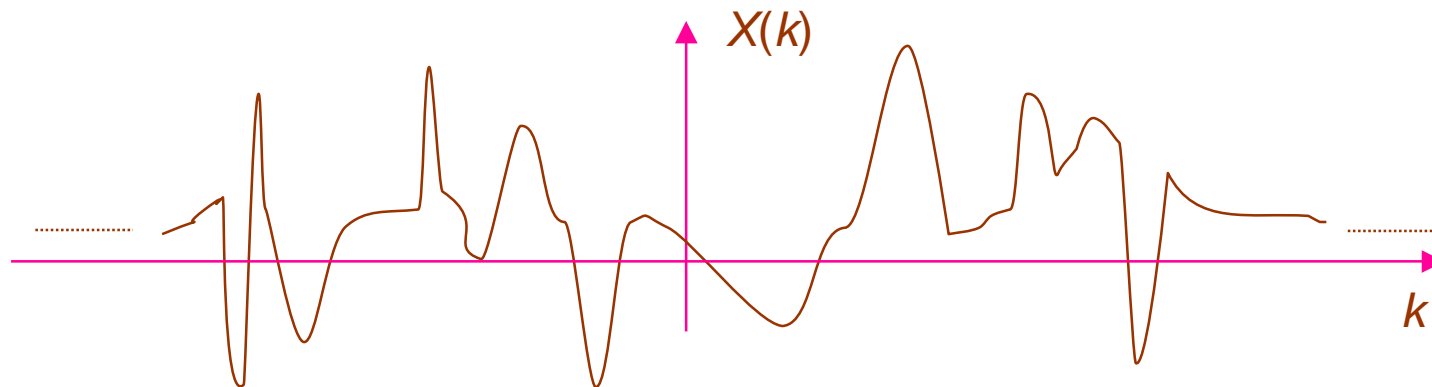
$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Função $X(k) = k \Rightarrow$ variável aleatória (discreta)

Uma variável aleatória X é dita **discreta** se ela assume somente um número finito de valores em um intervalo de observação finito.

Se a variável aleatória X puder assumir qualquer valor em um intervalo de observação finito, ela é chamada de uma **variável aleatória contínua**.

Exemplo: Variável aleatória X que representa uma tensão de ruído é contínua.



Definição probabilística de variável aleatória:

X = variável aleatória

$P(X \leq x)$ = probabilidade do evento $X \leq x$, para um dado valor x .

Função cumulativa ou função distribuição da variável aleatória:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Propriedades:

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$,
2. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ para $x_1 \leq x_2$ (monótona não decrescente).

Note que $F_X(\infty) = 1 \Rightarrow$ evento certo

$F_X(-\infty) = 0 \Rightarrow$ evento impossível

Função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

O nome função densidade vem do fato de que, se $x_1 < X \leq x_2$, então

$$P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

Assim,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

ou seja, a função densidade de probabilidade é sempre uma função não-negativa com a área total sob a sua curva igual a 1.

Exemplo: Distribuição uniforme

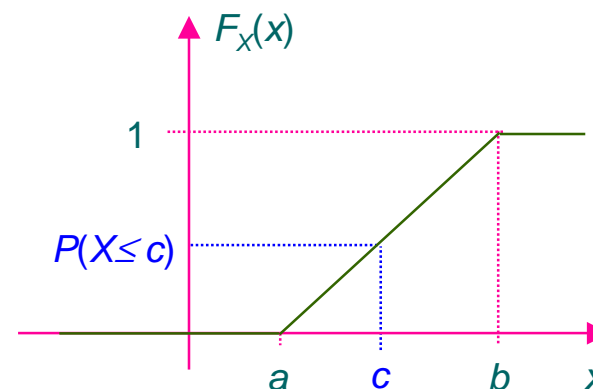
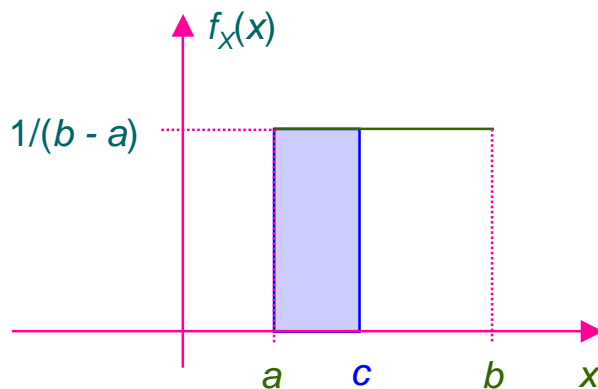
Considere a variável X definida por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

onde $b > a$.

Uma variável aleatória X com a função densidade de probabilidade acima é denominada **uniformemente distribuída**.



Duas variáveis aleatórias X e Y :

Função distribuição conjunta: $F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

Função densidade de probabilidade conjunta: $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$

Assim, $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\lambda, \eta) d\lambda d\eta = 1$

A função distribuição da variável X pode ser obtida fazendo:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(\lambda, \eta) d\lambda d\eta$$

Diferenciando ambos os lados da $F_X(x)$ acima com relação a x , obtemos

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, \eta) d\eta$$

Análise similar vale para $f_Y(y)$.

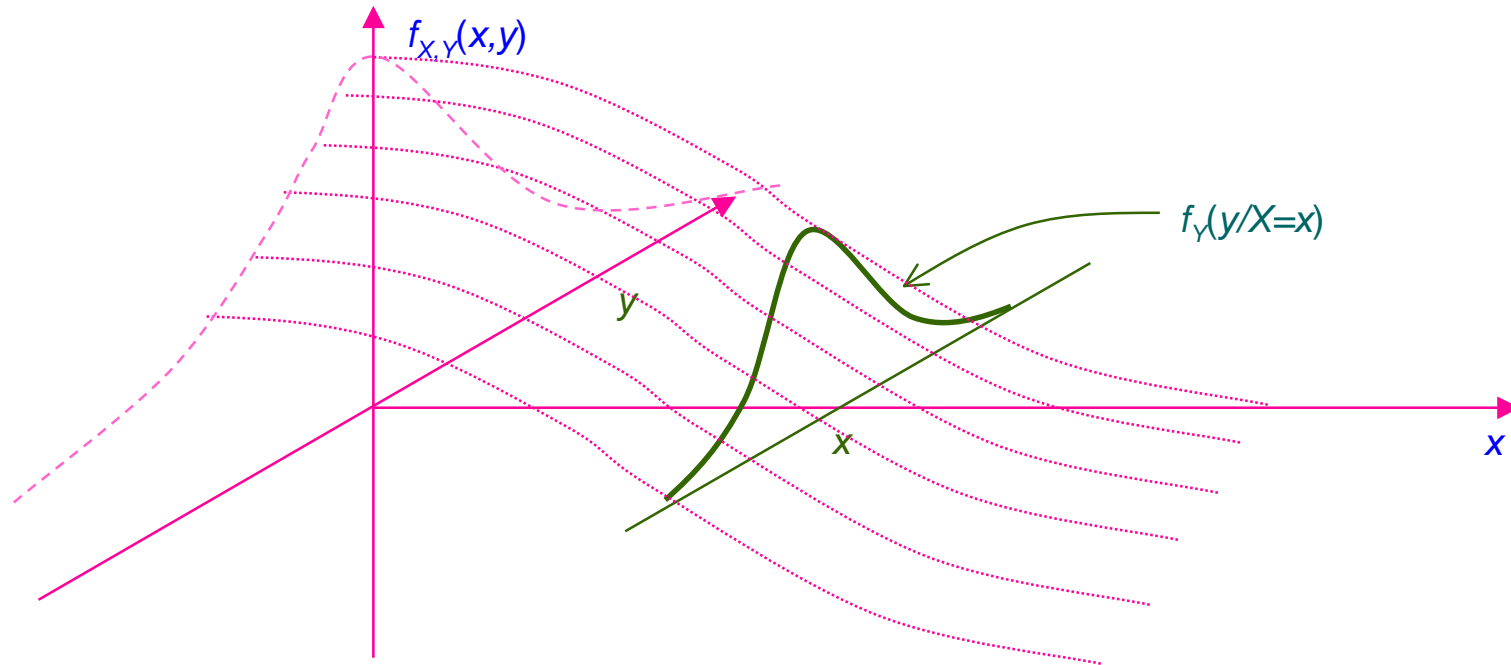
$f_X(x)$ e $f_Y(y)$ são denominadas de densidades de probabilidade marginais.

Suponha que X e Y sejam variáveis aleatórias contínuas com função densidade de probabilidade conjunta igual a $f_{X,Y}(x,y)$.

A função densidade de probabilidade condicional de Y dado que $X = x$ é definida por:

$$f_Y(y | X = x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

desde que a densidade de probabilidade marginal $f_X(x) > 0$.



Note que, se as variáveis aleatórias X e Y forem estatisticamente independentes, o conhecimento do resultado de X não afeta a distribuição de Y , isto é,

$$f_Y(y / X = x) = f_Y(y)$$

Nesta condição, podemos expressar a função densidade de probabilidade conjunta como:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Médias estatísticas:

A média ou valor esperado da variável X é definida por:

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$$

onde $E[\cdot]$ denota o operador expectativa.

A média ou valor esperado de uma função $g(X)$ é definida por:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

Para o caso especial, onde $g(X) = X^n$, obtemos o n -ésimo momento da distribuição de probabilidade da variável aleatória X , isto é,

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx$$

Valor quadrático médio, quando $n = 2$:

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$$

Momentos Centrais são os momentos das diferença entre a variável X e sua média m_X :

$$E[(X - m_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^n f_X(x) dx$$

Variância para $n = 2$:

$$\text{Var}[X] = \sigma_X^2 = E[(X - m_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 f_X(x) dx$$

Desvio padrão: σ_X

$\text{Var}(X)$ é uma medida da “dispersão” da variável X .

A variância essencialmente restringe a largura efetiva da função densidade de probabilidade de uma variável aleatória X em torno da sua média m_X .

Desigualdade de Chebyshev:

$$P(|X - m_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}$$

ε = número positivo.

Portanto, a média e a variância de uma variável aleatória dá uma descrição parcial de sua distribuição de probabilidade.

O operador $E[\cdot]$ é linear, isto é, o valor esperado da soma de duas variáveis é igual a soma dos valores esperados individuais.

$$\sigma_X^2 = E[(X - m_X)^2] = E[X^2 - 2Xm_X + m_X^2] = E[X^2] - 2E[X]m_X + m_X^2$$

Então, podemos expandir $E[(X - m_X)^2]$ usando a linearidade de $E[\cdot]$:

$$\sigma_X^2 = E[X^2] - m_X^2$$

Portanto, se $m_X = 0 \Rightarrow \text{Var}[X] = E[X^2]$.

Função Característica da distribuição de probabilidade da variável aleatória X :

$$\phi_X(v) = E[\exp(jvX)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \exp(jvx) dx$$

onde v é um número real.

A função característica é uma média estatística que pode ser considerada como a transformada de Fourier (a menos do sinal na exponencial) da função densidade de probabilidade $f_X(x)$.

Transformada de Fourier: $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$

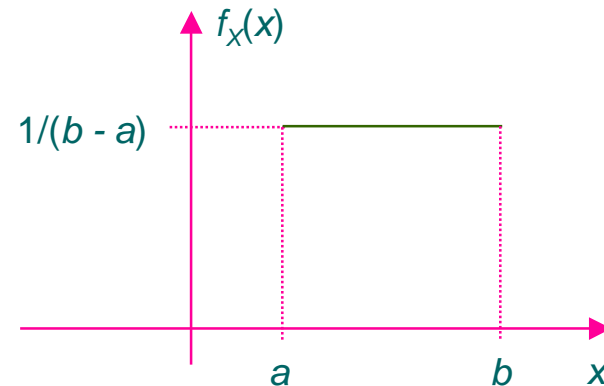
Como $v \Leftrightarrow x$ desempenham o mesmo papel de $2\pi f \Leftrightarrow t$, podemos deduzir que:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(v) \exp(-jvx) dv$$

Exemplo: Média e variância de X com distribuição uniforme.

Função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$



média: $m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{1}{2}(b+a)$

$\Rightarrow m_X$ é portanto a média aritmética de seus limites a e b .

valor quadrático médio de X : $E[X^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2)$

variância de X : $\sigma_X^2 = E[X^2] - m_X^2 = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) - \left[\frac{1}{2}(b+a)\right]^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2$

Exemplo: Soma de duas variáveis aleatórias independentes X e Y :

$$Z = X + Y$$

função característica de Z :

$$\phi_Z(v) = E[\exp(jv(X + Y))] = E[\exp(jvX)\exp(jvY)]$$

como X e Y são estatisticamente independentes, temos:

$$\phi_Z(v) = E[\exp(jvX)]E[\exp(jvY)] = \phi_X(v)\phi_Y(v)$$

por analogia com a análise de Fourier (produto em frequência \Leftrightarrow convolução no tempo), temos que a função densidade de probabilidade de Z é dada por:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - \eta)f_Y(\eta)d\eta$$

Momentos conjuntos

Variáveis aleatórias: X e Y .

Momentos conjuntos = valor esperado de $X^j Y^k$, onde j e k são inteiros positivos:

$$E[X^j Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_{XY}(x, y) dx dy$$

quando $j = k = 1 \Rightarrow$ **correlação** = $E[XY]$.

Covariância de X e Y :

$$\text{Cov}[XY] = E[(X - m_x)(Y - m_y)] = E[XY] - m_x m_y$$

X e Y são incorrelatas se e somente se $\text{Cov}[XY] = 0$.

X e Y são ortogonais se e somente se $E[XY] = 0$.

Prova: $\text{Cov}[XY] = E[XY] - m_X m_Y$

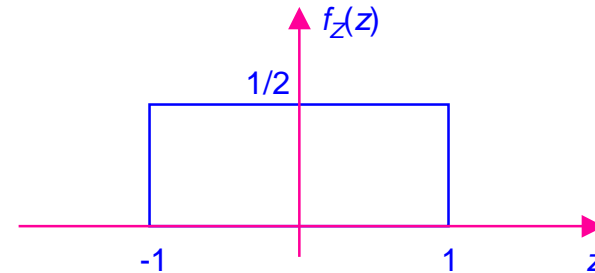
$$\begin{aligned}\text{Cov}[XY] &= E[(X - m_X)(Y - m_Y)] \\ &= E[XY - m_X Y - X m_Y + m_X m_Y] \\ &= E[XY] - m_X E[Y] - E[X] m_Y + m_X m_Y \\ &= E[XY] - m_X m_Y - m_X m_Y + m_X m_Y \\ &= E[XY] - m_X m_Y\end{aligned}$$

Seja σ_X e σ_Y o desvios padrão de X e Y , respectivamente. A covariância de X e Y normalizada em relação a $\sigma_X \sigma_Y$ é denominada de coeficiente de correlação de X e Y :

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}[XY]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Exemplo: Z = variável aleatória uniformemente distribuída dada por:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$



Seja $X = Z$ e $Y = Z^2$, então Y e X **não** são estatisticamente independentes.

X e Y são incorrelatas ?

$$\text{Média de } X: E[X] = E[Z] = \int_{-1}^1 z \frac{1}{2} dz = 0$$

$$\text{Média de } Y: E[Y] = E[Z^2] = \int_{-1}^1 z^2 \frac{1}{2} dz = \frac{1}{3}$$

$$\text{Cov}[XY] = E\left[(X - 0)\left(Y - \frac{1}{3}\right)\right] = E[XY] - \frac{1}{3}E[X] = \int_{-1}^1 z^3 \frac{1}{2} dz = 0$$

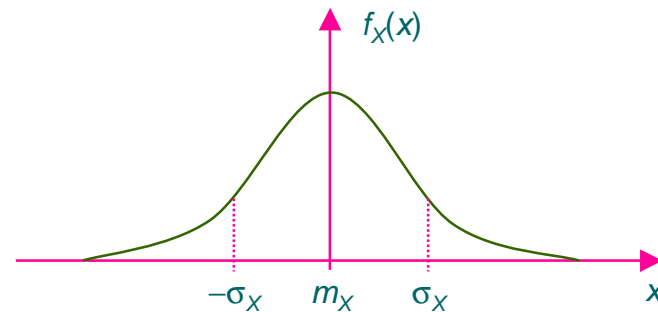
As variáveis aleatórias X e Y são **incorrelatas** mesmo embora elas **não** sejam estatisticamente independentes.

4. Distribuição Gaussiana

Variável aleatória gaussiana: muito utilizada em comunicações.

Variável aleatória gaussiana X de média m_X e desvio padrão σ_X possui função densidade de probabilidade dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left[-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]$$



Prova de que $f_X(x)$ é uma função densidade de probabilidade:

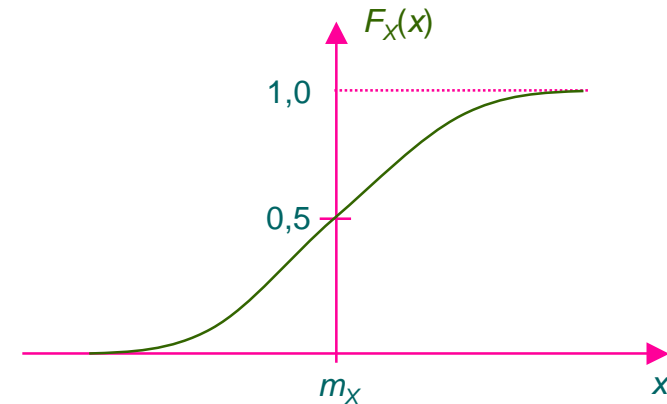
1) $f_X(x) \geq 0$

2)
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\pi t^2] dt = 1$$

onde $t = \frac{x-m_X}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}$ (mudança de variável).

A função distribuição da variável aleatória gaussiana X é dada por:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{(\xi - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] d\xi$$

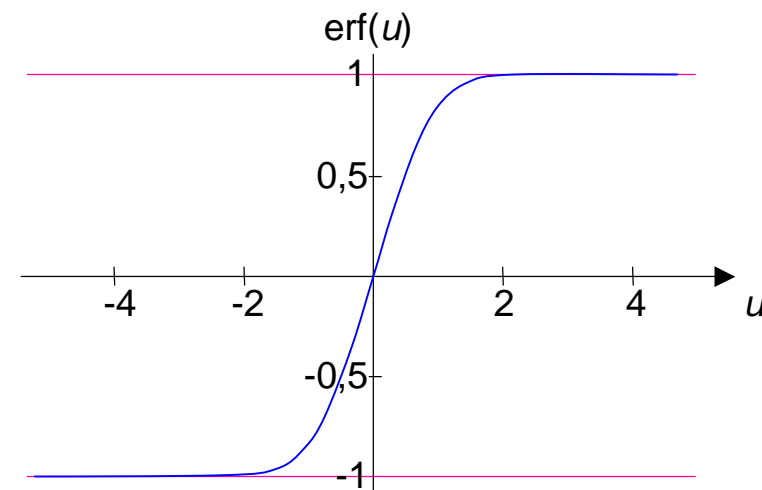


$F_X(x)$ pode ser calculada para um dado valor de x específico através de tabelas da função erro que é definida por:

$$\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-z^2) dz$$

$$\text{erf}(0) = 0$$

$$\text{erf}(\infty) = 1$$



Usando a simetria de $f_X(x)$ e utilizando uma simples mudança de variável, obtemos:

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - m_X}{\sqrt{2}\sigma_X} \right) \right]$$

Exemplo: Desejamos obter a probabilidade da variável aleatória gaussiana X se encontrar dentro do intervalo $m_X - k\sigma_X < X \leq m_X + k\sigma_X$, $k = \text{constante}$

$$\begin{aligned} P(m_X - k\sigma_X < X \leq m_X + k\sigma_X) &= F_X(m_X + k\sigma_X) - F_X(m_X - k\sigma_X) \\ &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(-\frac{k}{\sqrt{2}}\right) \right] \\ &= \operatorname{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

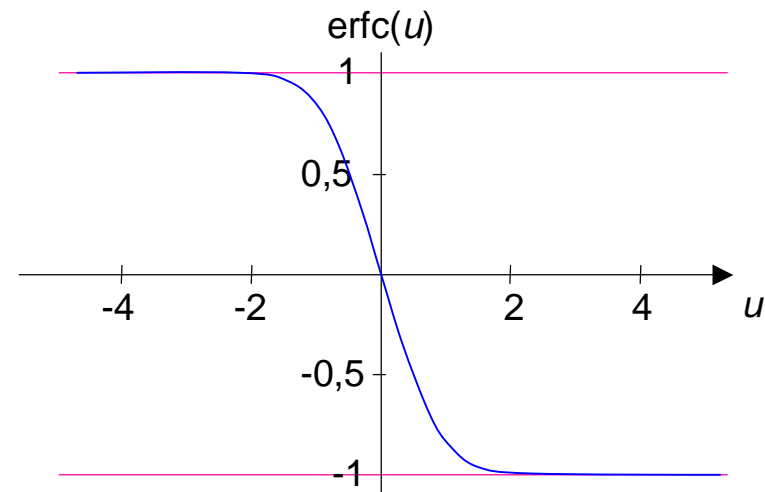
Propriedade: $\operatorname{erf}(-u) = -\operatorname{erf}(u)$

Para $k = 3$:

$$P(m_X - 3\sigma_X < X \leq m_X + 3\sigma_X) = \operatorname{erf}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 0,997$$

Função complementar da função erro:

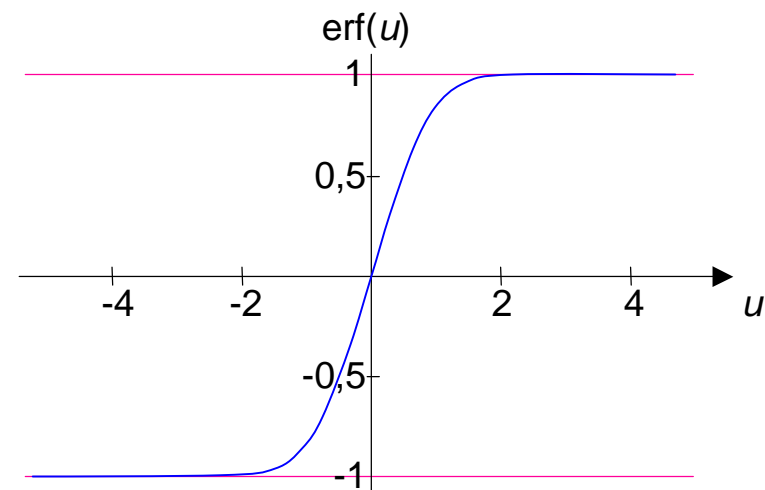
$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} \exp(-z^2) dz$$



Relação entre as funções erro: $\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u)$.

Função erro:

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-z^2) dz$$



TEOREMA DO LIMITE CENTRAL

Seja X_1, X_2, \dots, X_n , um conjunto de variáveis aleatórias que satisfaz as seguintes exigências:

- a) X_k são estatisticamente independentes ($k = 1, 2, \dots, n$),
- b) Todas as variáveis X_k possuem a mesma função densidade de probabilidade,
- c) Existe a média e a variância para cada X_k .

Define-se uma nova variável aleatória Y :

$$Y = \sum_{k=1}^n X_k$$

Então, o teorema do limite central diz que a variável aleatória normalizada:

$$Z = \frac{Y - E[Y]}{\sigma_Y}$$

se aproxima de uma **variável aleatória gaussiana** com média zero e variância unitária à medida que o número n de variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n , aumenta.

Note que

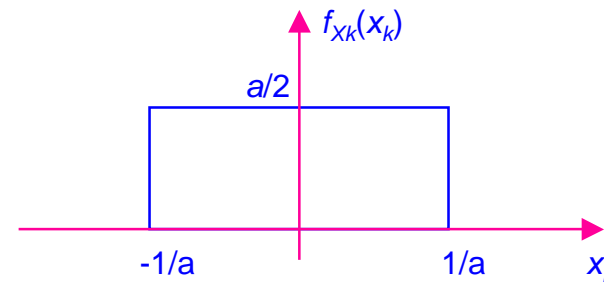
$$E[Y] = \sum_{k=1}^n E[X_k]$$

$$\sigma_Y^2 = \text{Var}[Y] = \sum_{k=1}^n \sigma_{X_k}^2$$

Exemplo: Soma de n variáveis aleatórias uniformemente distribuídas

$$Y = \sum_{k=1}^n X_k$$

$$f_{X_k}(x_k) = \begin{cases} \frac{a}{2} & -\frac{1}{a} \leq x_k \leq \frac{1}{a} \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$



Logo,

$$m_{X_k} = 0$$

$$\sigma_{X_k}^2 = \frac{a^2}{12}$$

Então,

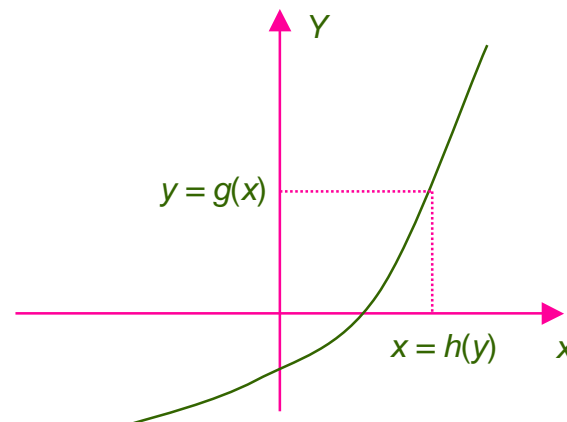
$$m_Y = 0 \quad \sigma_Y^2 = \frac{na^2}{12}$$

5. Transformação de variáveis aleatórias

Problema: Determinar a função densidade de probabilidade de uma variável aleatória Y que é obtida por uma transformação um-para-um de uma dada variável aleatória X .

Caso mais simples: Y é uma função diferenciável monótona crescente g de X :

$$Y = g(X)$$



Neste caso, temos $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq h(y)) = F_X(h(y))$

onde h é a transformação inversa $h(y) = g^{-1}(y)$.

Supondo que X possua uma função densidade de probabilidade $f_X(x)$ conhecida, então:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x) dx$$

Diferenciando ambos os lados com relação a variável y , obtemos

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \frac{dh}{dy}$$

Supondo agora que g é uma função diferenciável monótona decrescente com sua inversa igual a h , podemos escrever que

$$F_Y(y) = \int_{h(y)}^{\infty} f_X(x) dx$$

Diferenciando, temos

$$f_Y(y) = -f_X(h(y)) \frac{dh}{dy}$$

onde a dh/dy é negativa nesta expressão.

Assim, podemos expressar as duas equações de função densidade de probabilidade (PDF) em uma única fórmula:

$$f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| \frac{dh}{dy} \right|$$

para uma função diferenciável um-para-um de uma dada variável aleatória.

Exemplo: Transformação de lei quadrática

$$Y = X^2$$

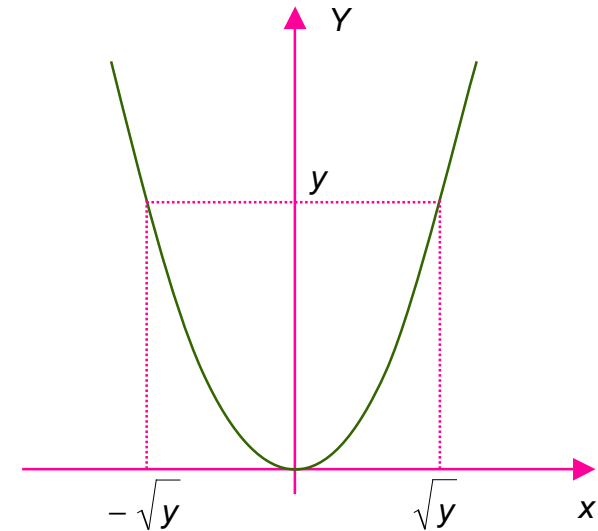
X gaussiana com média 0 e variância $= \sigma_X^2$

PDF de $Y = ?$

$$P(Y \leq y) = 0 \quad y < 0$$

assim,

$$F_Y(y) = 0 \quad y < 0$$



Além disso, a transformação inversa não possui valor único, pois

$$x = h(y) = \pm\sqrt{y}$$

Assim, valores positivos e negativos de x contribuem para y .

Suponha que desejamos a probabilidade de $Y \leq y$, onde $y \geq 0$, então

$$P(Y \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y})$$

$$= \int_{-\infty}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{y}} f_X(x) dx$$

Diferenciando em relação a y ambos os lados da expressão anterior, obtemos

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]$$

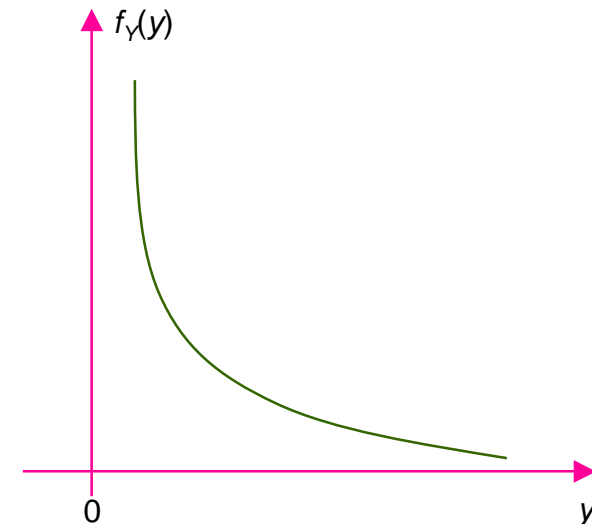
Note que

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

assim, obtemos

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}\sigma_X} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma_X^2}\right) \quad y \geq 0$$

$$f_Y(y) = 0 \quad y < 0$$



A função densidade de probabilidade acima é conhecida como **função densidade chi-quadrada** quando ela é escrita em função da variável $\chi^2 = y$.

6. PROCESSOS ALEATÓRIOS

Análise estatística de sistemas de comunicações \Rightarrow caracterização de sinais aleatórios, tais como: sinais de voz, TV, dados digitais e ruído elétrico.

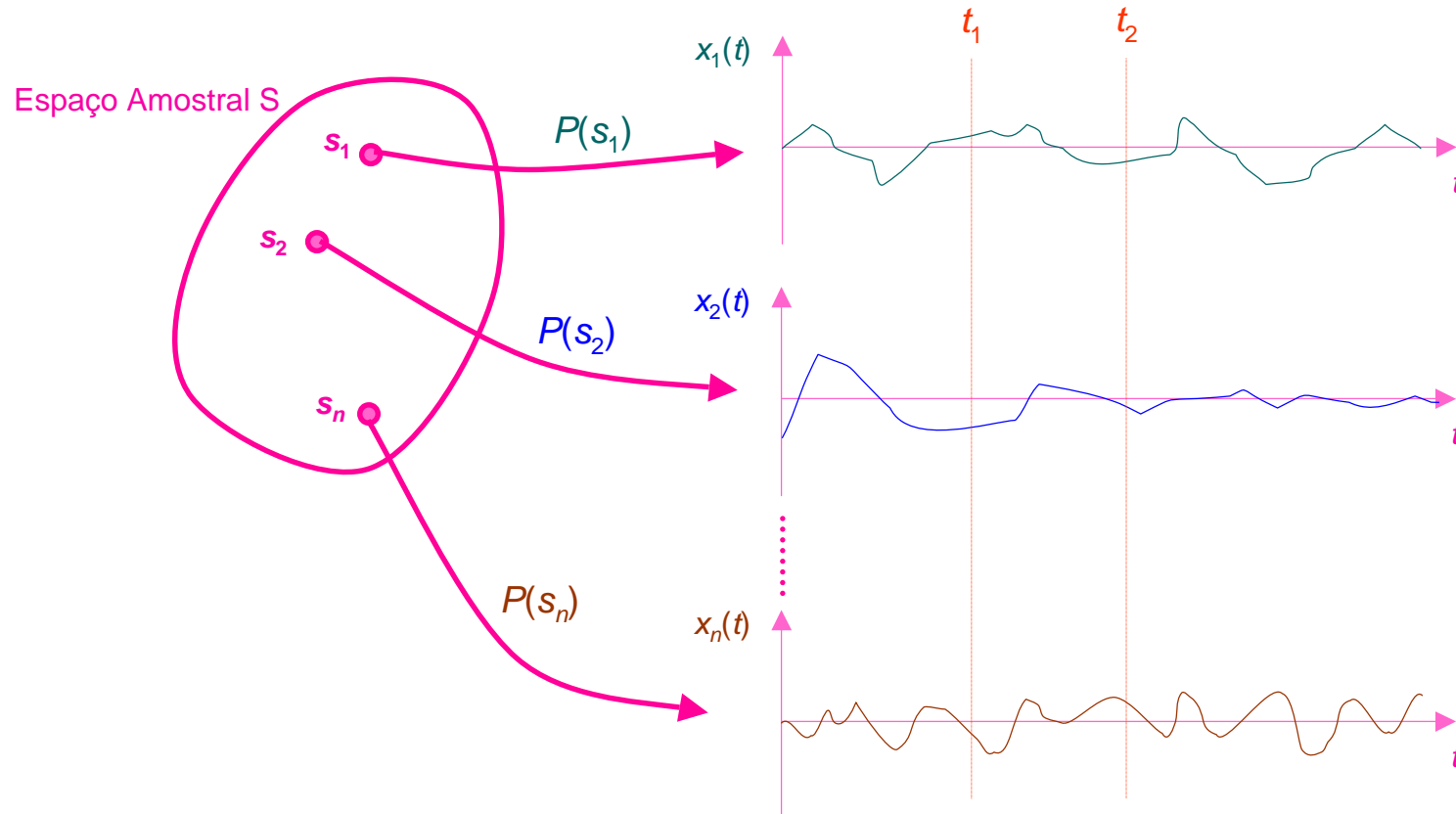
Propriedades destes sinais aleatórios:

- são funções do tempo, definidas sobre um intervalo.
- antes de realizar o experimento, não é possível descrever com exatidão a forma de onda que vai ser observada.

Portanto, na descrição de sinais aleatórios, cada ponto amostra do espaço amostral é função do tempo.

Um processo aleatório $X(t)$ é um “ensemble” de funções no tempo com uma regra probabilística que relaciona uma probabilidade a um evento significativo associado com uma observação de uma destas funções.

Funções amostra: $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$



Instante t_1 :

- cada ponto s_j do espaço amostral S tem associado um número $x_j(t_1)$ e uma probabilidade $P(s_j)$.
- a coleção de números $x_1(t_1), x_2(t_1), \dots, x_n(t_1)$ forma uma **variável aleatória** denotada por $X(t_1)$.

Instante t_2 :

- cada ponto s_j tem associado um número $x_j(t_2)$ e uma probabilidade $P(s_j)$.
- a coleção de números $x_1(t_2), x_2(t_2), \dots, x_n(t_2)$ forma uma **variável aleatória** denotada por $X(t_2)$.

Variável aleatória: resultado de um experimento é mapeado em um número.

Processo aleatório: resultado é mapeado em uma onda que é função do tempo.

Vetores aleatórios obtidos a partir de processos aleatórios:

Processo aleatório $X(t) \Rightarrow$ número infinito de variáveis aleatórias, uma para cada instante de tempo t ($-\infty < t < \infty$).

$F_{X(t_1)}(x_1)$ = função distribuição da variável aleatória $X(t_1)$.

$X(t_1)$ = variável aleatória obtida pela observação do processo aleatório $X(t)$ no tempo t_1 .

Então, para k instantes de tempo t_1, t_2, \dots, t_k , pode-se definir k variáveis aleatórias $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$, respectivamente.

Assim, pode-se definir a função distribuição conjunta como sendo:

$$F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_k) \leq x_k)$$

Notação mais conveniente: Vetorial

Vetor de variáveis aleatórias: $\mathbf{X}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{bmatrix}$

Vetor de resultados das variáveis aleatórias: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$

Notação para a função distribuição conjunta: $F_{\mathbf{X}(\mathbf{t})}(\mathbf{x})$

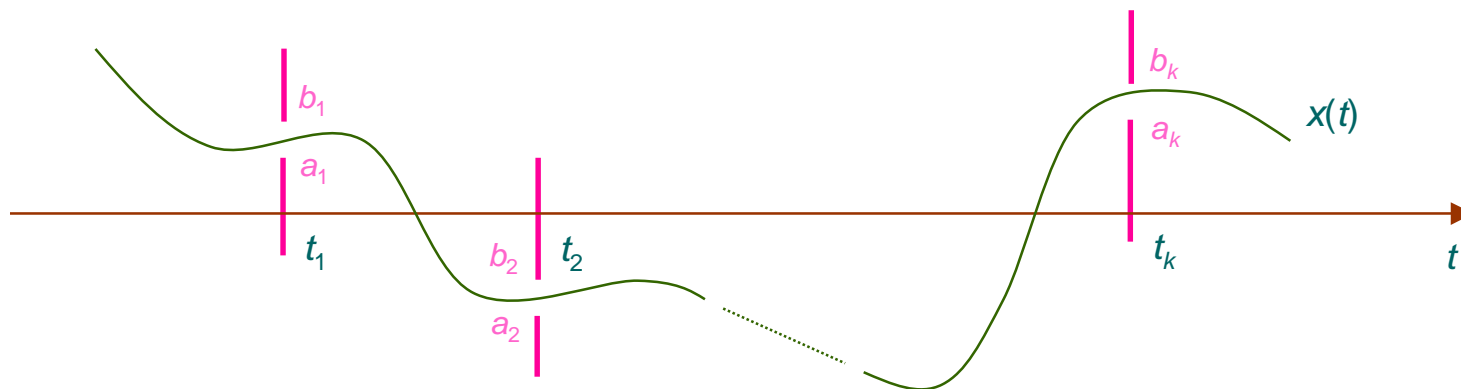
Para um dado ponto amostra s_j , as componentes do vetor $\mathbf{X}(\mathbf{t})$ representam os valores da função amostra $x_j(t)$ observada nos tempos t_1, t_2, \dots, t_k .

A função densidade de probabilidade conjunta do vetor aleatório $\mathbf{X}(t)$ é dada por:

$$f_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_k} F_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x})$$

Esta função é sempre não negativa, com o volume sob ela igual a 1.

Exemplo: Probabilidade de uma onda $x(t)$ de um processo $X(t)$ passar por k janelas.



Desejamos a probabilidade do evento conjunto: $A = \{a_i < X(t_i) < b_i\}, i = 1, 2, \dots, k$.

Se conhecemos a função densidade de probabilidade conjunta, temos:

$$P(A) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_k}^{b_k} f_{\mathbf{X}(\mathbf{t})}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \cdots dx_k$$

7. ESTACIONARIDADE:

Um processo aleatório $X(t)$ é dito **estritamente estacionário** se a função densidade de probabilidade conjunta $f_{X(t)}(\mathbf{x})$ for invariante a deslocamentos da origem do tempo, isto é,

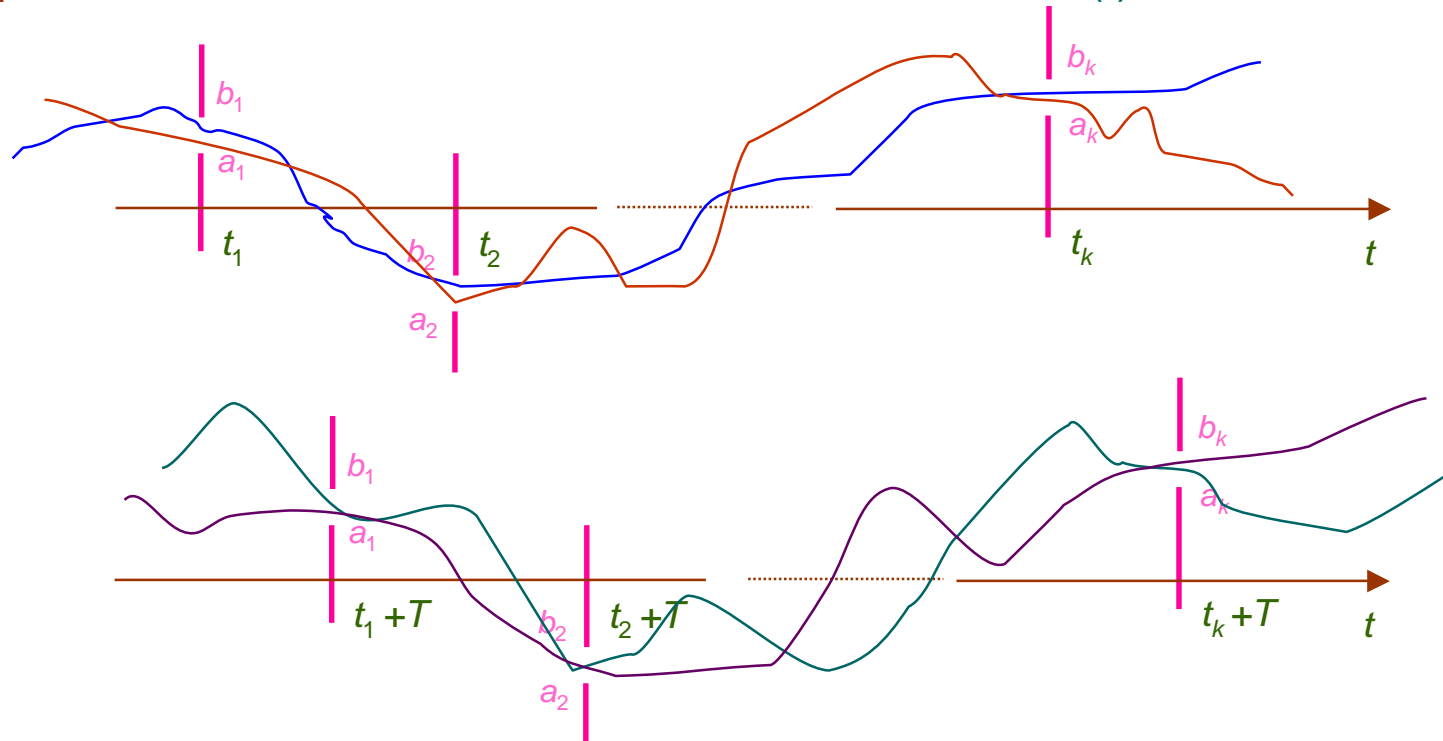
$$f_{X(t)}(\mathbf{x}) = f_{X(t+T)}(\mathbf{x})$$

para todo conjunto de instantes $\{t_i\}$, $i = 1, 2, \dots, k$ e qualquer deslocamento T .

Processos aleatórios estacionários são freqüentemente encontrados na prática.

Muitas de suas propriedades são comumente descritas pelo primeiro e segundo momentos.

Exemplo: Processo aleatório estritamente estacionário $X(t)$.



A probabilidade de um conjunto de funções amostra passar pelas janelas da primeira figura é igual a probabilidade de um conjunto de funções amostra passar pelas janelas deslocadas no tempo da segunda figura.

Não é necessário que os conjuntos de funções amostras sejam iguais.

8. MÉDIA, FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO E FUNÇÃO COVARIÂNCIA

Distribuição de probabilidade de processos aleatórios \Rightarrow difícil de encontrar!!!

Descrição parcial do processo aleatório: média, função de autocorrelação e função de autocovariância.

Seja $X(t)$ um processo aleatório estritamente estacionário e seja $X(t_k)$ uma variável aleatória obtida pela observação de $X(t)$ no instante t_k .

Então define-se:

Média de $X(t)$:

$$m_X = E[X(t_k)] = \text{cte} \quad \text{para qualquer } t_k$$

Notação simplificada: $m_X = E[X(t)] = \text{cte}$ para um valor fixo de t .

Função de autocorrelação de $X(t)$:

$$R_X(t_k - t_j) = E[X(t_k)X(t_j)] \quad \text{para qualquer } t_k \text{ e } t_j$$

ou

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t-\tau)] \quad \text{onde } \tau = t_k - t_j$$

A função de autocorrelação **para processos estacionários** é independente da origem dos tempos.

$X(t_k)$ e $X(t_j)$ são v.a. obtidas do processo $X(t)$ nos instantes t_k e t_j , respectivamente.

Função de Autocovariância:

$$K_X(t_k - t_j) = E[(X(t_k) - m_X)(X(t_j) - m_X)] \quad \text{qualquer } t_k \text{ e } t_j$$

Simplificando a notação:

$$K_X(\tau) = E[(X(t) - m_X)(X(t - \tau) - m_X)]$$

Para um processo estacionário, temos:

$$K_X(\tau) = R_X(\tau) - (m_X)^2$$

Se o processo possui média zero, então $K_X(\tau) = R_X(\tau)$.

Descrição parcial de um processo aleatório: média e função de autocorrelação.

Processo Aleatório Estacionário no Sentido Amplo:

Um processo aleatório é denominado estacionário de sentido amplo (*wide-sense stationary* - WSS) se ele **não** for estritamente estacionário mas satisfizer as seguintes três condições:

1. A média do processo é constante.
2. A função de autocorrelação do processo é independente de um deslocamento da origem dos tempos.
3. A função de autocorrelação para $\tau = 0$ é finita.

Propriedades da autocorrelação para processo estacionário no sentido amplo:

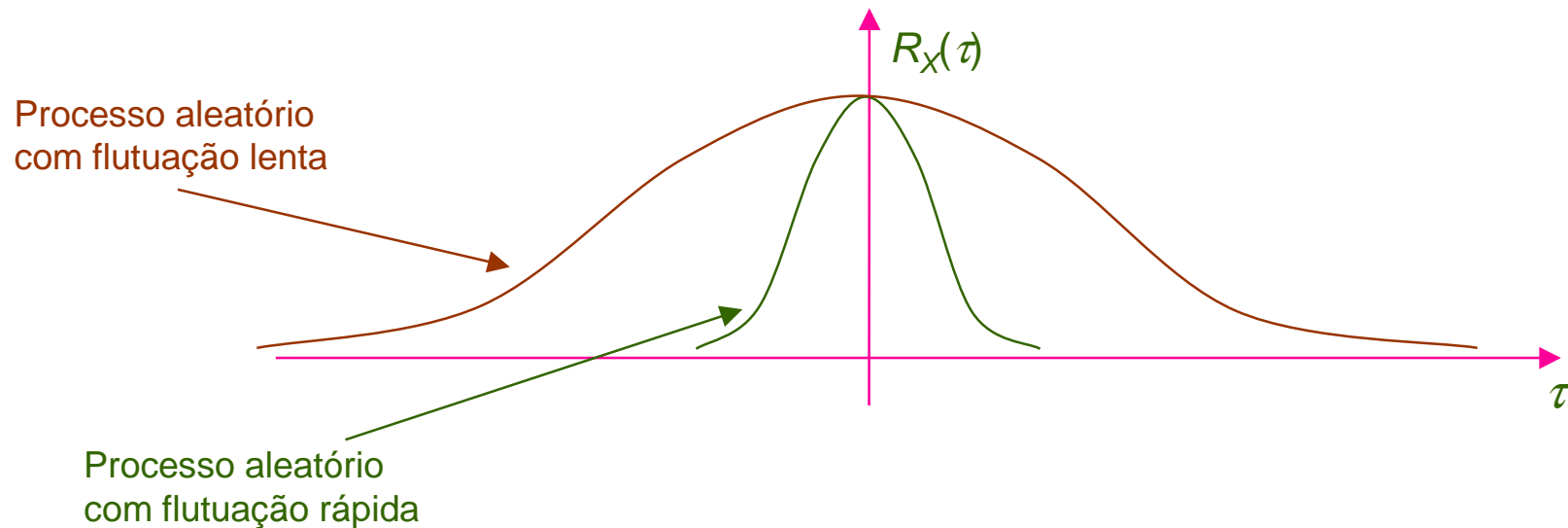
a) $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

b) $R_X(0) = E[X^2(t)]$

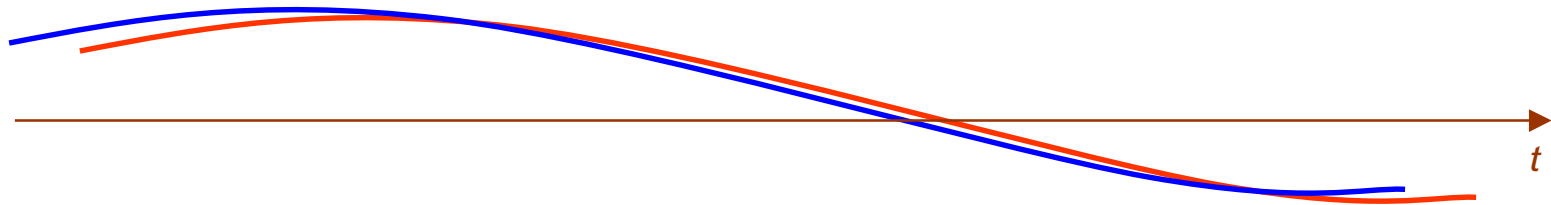
c) $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$

Significado físico da função de autocorrelação:

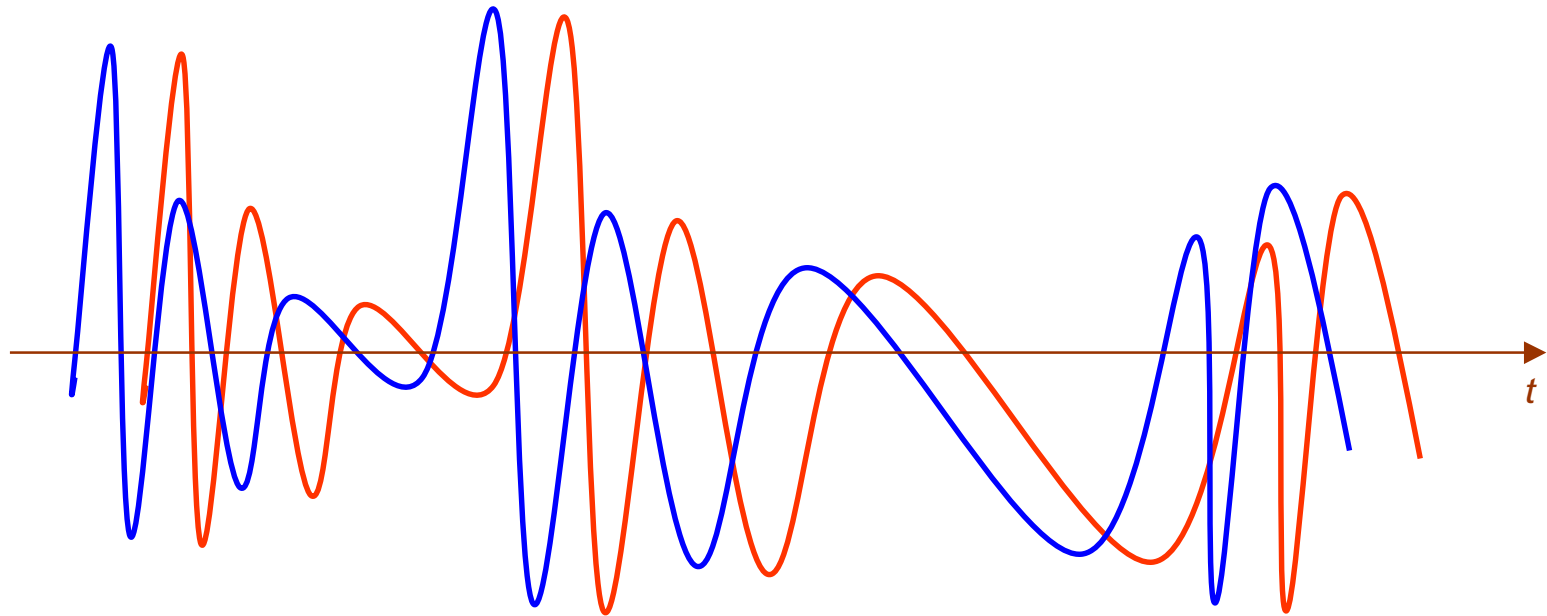
- $R_X(\tau)$ fornece um modo de descrever a interdependência de duas variáveis aleatórias obtidas pela observação de um processo aleatório $X(t)$ em instantes separados de τ segundos.
- Quanto mais rápido $X(t)$ varia no tempo mais rapidamente $R_X(\tau)$ decresce de seu máximo $R_X(0)$ quando τ aumenta.



Flutuação lenta:



Flutuação rápida:



Tempo de Descorrelação τ_0 :

É o tempo necessário para que a magnitude da função de autocorrelação $R_X(\tau)$ de um processo aleatório $X(t)$ estacionário no sentido amplo com média zero caia para 1% de seu valor máximo $R_X(0)$.

Exemplo: Cálculo da autocorrelação de uma onda senoidal com fase aleatória

$$X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

A e f_c são constantes e fase com distribuição uniforme:

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

Função amostra do processo aleatório:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta)$$

Obs.: θ é uma constante para cada função amostra.

A função de autocorrelação é dada por:

$$R_X(\tau) = E[X(t + \tau)X(t)] = E[A \cos(2\pi f_c(t + \tau) + \Theta) A \cos(2\pi f_c t + \Theta)]$$

Aplicando a relação trigonométrica:

$$\cos(a)\cos(b) = [\cos(a + b) + \cos(a - b)]/2.$$

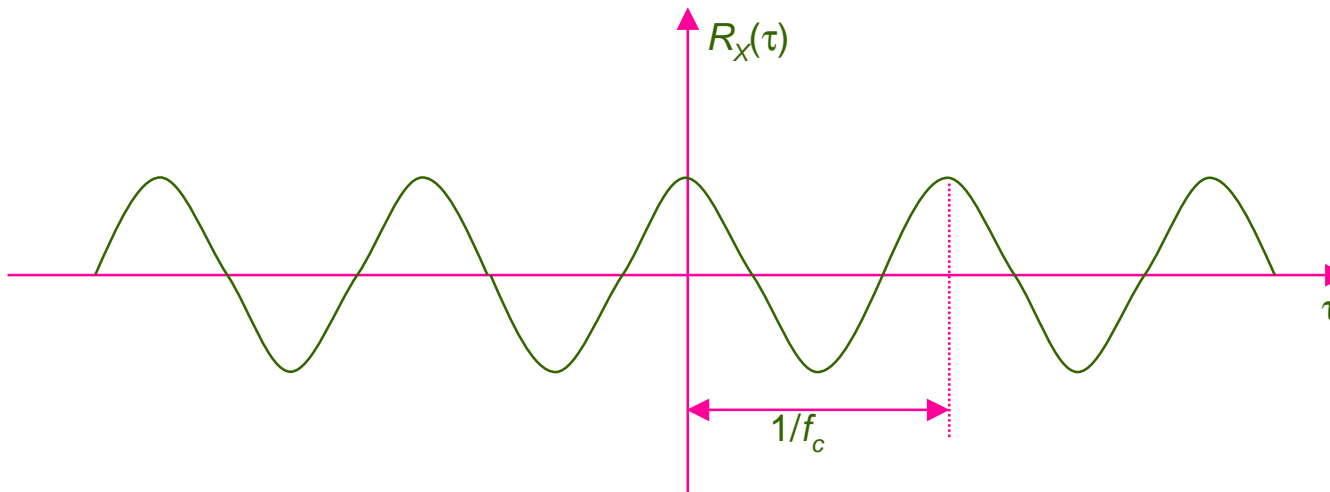
resulta:

$$R_X(\tau) = E[X(t + \tau)X(t)] = \frac{A^2}{2} E[\cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\Theta)] + \frac{A^2}{2} E[\cos(2\pi f_c \tau)]$$

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\theta) \frac{1}{2\pi} d\theta + \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$$

$= 0$

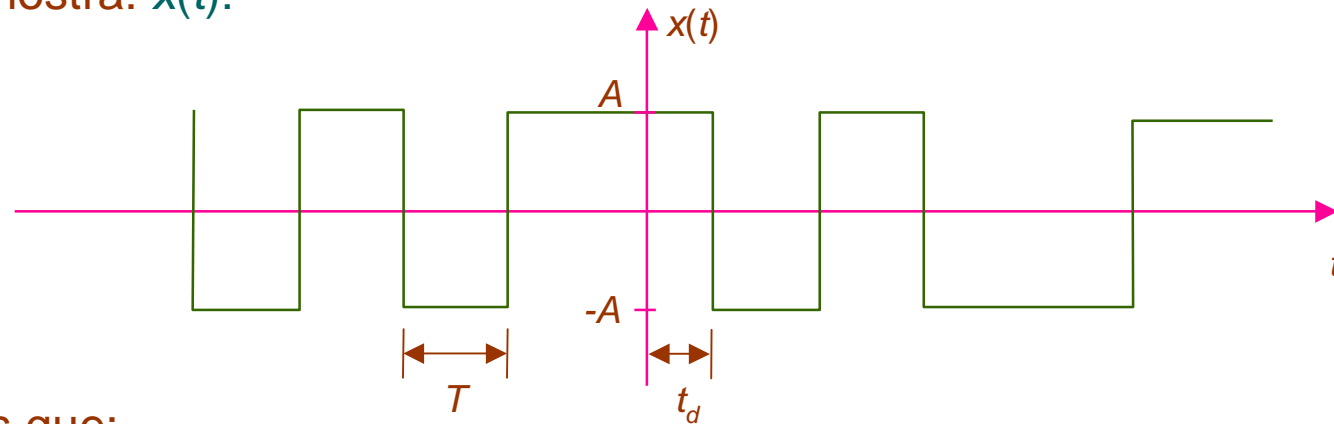
$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$$



Exemplo: Onda binária aleatória

$X(t)$: processo composto de uma seqüência aleatória de símbolos binários 0 e 1

Função amostra: $x(t)$:



Assumimos que:

- 1 e 0 $\Leftrightarrow +A$ e $-A$, respectivamente, de duração T segundos.
- o instante t_d de início do primeiro pulso é equiprovável no intervalo $[0, T]$. Portanto, t_d é um valor amostra de uma variável aleatória T_d uniformemente distribuída com função densidade de probabilidade:

$$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T} & 0 \leq t_d \leq T \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

- no intervalo de tempo $(n-1)T < t - t_d < nT$, onde n é um inteiro, temos que $P(0) = P(1) \Rightarrow +A$ e $-A$ são equiprováveis.

Então, $E[X(t)] = 0$.

Função de autocorrelação de $X(t)$:

$$R_X(t_k - t_j) = E[X(t_k)X(t_j)]$$

onde $X(t_k)$ e $X(t_j)$ são variáveis aleatórias obtidas do processo $X(t)$ nos instantes t_k e t_j , respectivamente.

1º caso: $|t_k - t_j| > T \Rightarrow X(t_k)$ e $X(t_j)$ ocorrem em intervalos de pulso diferentes e são portanto independentes.

$$E[X(t_k)X(t_j)] = E[X(t_k)]E[X(t_j)] = 0$$

2º caso: $|t_k - t_j| < T \Rightarrow X(t_k)$ e $X(t_j)$ ocorrem no mesmo intervalo de pulso se e somente se o atraso $t_d < T - |t_k - t_j|$. Então o valor esperado condicional é dado por:

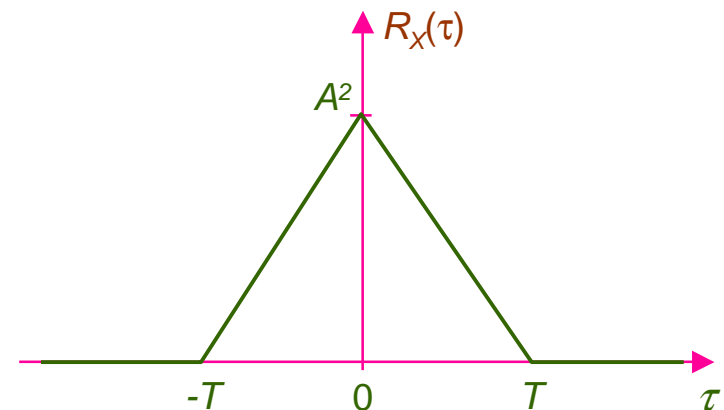
$$E[X(t_k)X(t_j) | t_d] = \begin{cases} A^2 & t_d < T - |t_k - t_j| \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

Fazendo a média deste resultado para todos os valores de t_d , obtemos:

$$E[X(t_k)X(t_j)] = \int_0^{T-|t_k-t_j|} A^2 f_{T_d}(t_d) dt_d = \int_0^{T-|t_k-t_j|} A^2 \frac{1}{T} dt_d = A^2 \left(1 - \frac{|t_k - t_j|}{T}\right)$$

Então,

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) & |\tau| < T \\ 0 & |\tau| \geq T \end{cases}$$



MÉDIAS NO TEMPO E ERGODICIDADE:

Estimação de um processo aleatório $X(t)$ por:

média: $m_X = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X(t)}(x)dx$

Autocorrelação: $R_X(\tau) = E[X(t)X(t - \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X(t)X(t-\tau)}(x, y)dxdy$

Problema:

difícil de se obter!!

Média no tempo : $\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)dt$

onde $x(t)$ é uma função amostra do processo $X(t)$.

Autocorrelação no tempo: $\langle x(t)x(t - \tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t - \tau)dt$

Note que $\langle x(t) \rangle$ e $\langle x(t)x(t - \tau) \rangle$ são variáveis aleatórias pois dependem de $x(t)$.

Em geral, médias de ensemble e no tempo **não** são iguais!!!

Processos Ergódicos

Um processo aleatório $X(t)$ é denominado **ergódico**, na sua forma mais geral, se todas as suas propriedades estatísticas puderem ser determinadas de uma função amostra representante de uma possível realização do processo.

Um processo aleatório para ser **ergódico** é necessário que seja **estritamente estacionário**.

Entretanto, **nem todo processo estacionário é ergódico**.

Em geral, não se está interessado em todas as médias de ensemble de um processo aleatório \Rightarrow só média e função autocorrelação \Rightarrow definição de ergodicidade em um sentido mais limitado.

Ergodicidade da Média:

média no tempo = média de ensemble

$$\langle x(t) \rangle = m_x$$

Condição *necessária e suficiente* para um processo aleatório ser ergódico na média:

$$\text{variância do estimador } \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \rightarrow 0 \text{ quando } T \rightarrow \infty$$

Ergodicidade na Função de Autocorrelação:

autocorrelação no tempo = autocorrelação de ensemble

$$\langle x(t) x(t-\tau) \rangle = R_x(\tau)$$

Condição *necessária e suficiente* para um processo aleatório ser ergódico na função de autocorrelação:

$$\text{variância do estimador } \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t-\tau)dt \rightarrow 0 \text{ quando } T \rightarrow \infty$$

Exemplo: Onda Senoidal com Fase Aleatória

Processo senoidal: $X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta)$

A e $f_c = \text{ctes}$ e $\Theta = \text{uniformemente distribuída entre } 0 \text{ e } 2\pi$:

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

Média do processo aleatório:

$$m_X = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(2\pi f_c t + \theta) f_{\Theta}(\theta) d\theta = \frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_c t + \theta) d\theta = 0$$

Função de autocorrelação do processo aleatório:

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$$

Seja $x(t)$ uma função amostra do processo aleatório, então:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_c t + \theta)$$

Média no tempo do processo é:

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \cos(2\pi f_c t + \theta) dt = 0$$

Função de autocorrelação no tempo do processo:

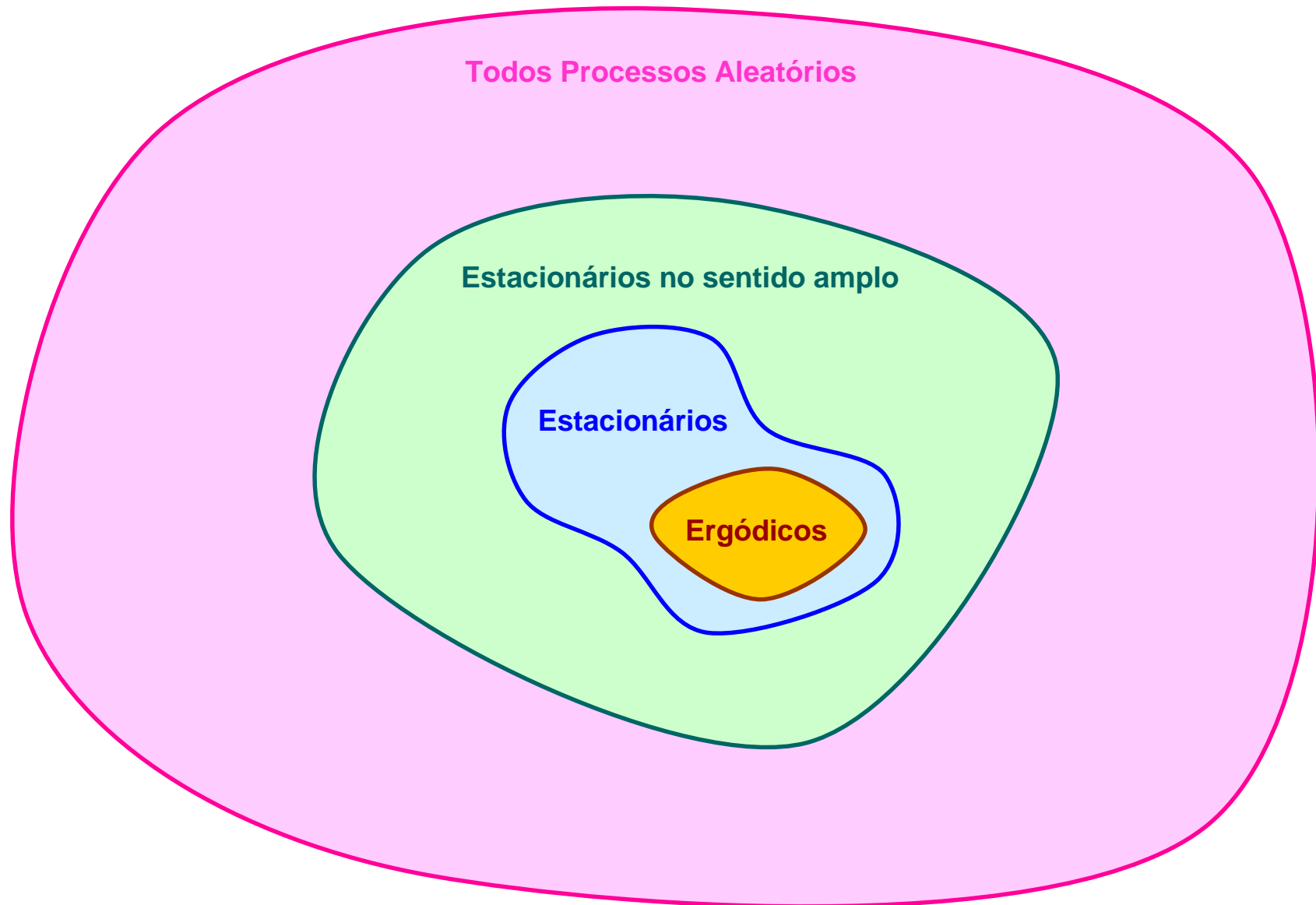
$$\langle x(t)x(t-\tau) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \cos(2\pi f_c (t-\tau) + \theta) A \cos(2\pi f_c t + \theta) dt$$

usando a relação trigonométrica para produto de cossenos e integrando, obtemos

$$\langle x(t)x(t-\tau) \rangle = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$$

Assim, as médias do ensemble e as médias temporais do processo são idênticas, portanto este processo é ergódico na média e na função de autocorrelação.

Hierarquia dos Processos Aleatórios:



Exemplo: Processo de Poisson

O conceito de pontos de Poisson pode ser especificado pelas seguintes propriedades:

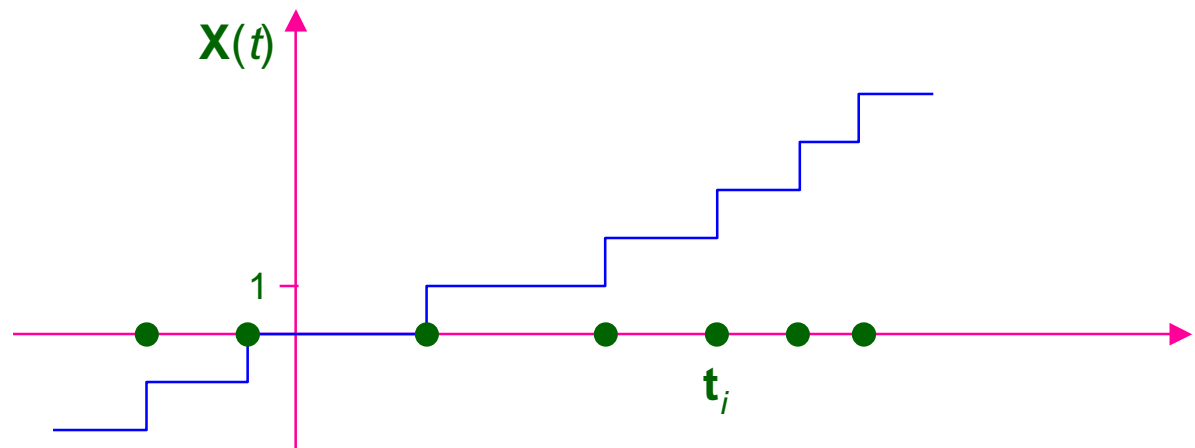
- O número $\mathbf{n}(t_1, t_2)$ de pontos \mathbf{t}_i , no intervalo (t_1, t_2) de comprimento igual a $t = t_2 - t_1$ é uma variável aleatória de Poisson com parâmetros λt .

$$P[\mathbf{n}(t_1, t_2) = k] = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

- Se os intervalos (t_1, t_2) e (t_3, t_4) não se sobrepõem, então as variáveis aleatórias $\mathbf{n}(t_1, t_2)$ e $\mathbf{n}(t_3, t_4)$ são independentes.

Usando os pontos t_j , formamos o processo aleatório:

$$X(t) = n(0, t)$$



Este é um processo de estados discretos constituído de uma família de funções escada crescentes com descontinuidades nos pontos t_j .

Para um t específico, $x(t)$ é uma variável aleatória de Poisson com parâmetro λt , então

$$E[X(t)] = \lambda t$$

E a sua autocorrelação é:

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{para } t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{para } t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

ou de forma equivalente:

$$\text{Cov}(t_1, t_2) = \lambda \min(t_1, t_2) = \lambda t_1 u(t_2 - t_1) + \lambda t_2 u(t_1 - t_2)$$

Prova: Para $t_1 = t_2$, temos que

$$E[\mathbf{X}^2(t)] = \lambda t + \lambda^2 t^2$$

Como $R(t_1, t_2) = R(t_2, t_1)$, basta provar a autocorrelação para $t_1 < t_2$.

As variáveis aleatórias $X(t_1)$ e $X(t_2) - X(t_1)$ são independentes pois os intervalos $(0, t_1)$ e (t_1, t_2) não se sobrepõem.

Além disso, $X(t_1)$ e $X(t_2) - X(t_1)$ possuem distribuição de Poisson com parâmetros $\lambda(t_1)$ e $\lambda(t_2 - t_1)$, respectivamente. Assim,

$$E[X(t_1)(X(t_2) - X(t_1))] = E[X(t_1)]E[X(t_2) - X(t_1)] = \lambda t_1 \lambda(t_2 - t_1)$$

Usando a identidade:

$$X(t_1)X(t_2) = X(t_1)[X(t_1) + X(t_2) - X(t_1)]$$

obtemos:

$$R(t_1, t_2) = \lambda t_1 + \lambda^2 t_1^2 + \lambda t_1 \lambda(t_2 - t_1)$$

De onde resulta:

$$R(t_1, t_2) = \begin{cases} \lambda t_2 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{para } t_1 \geq t_2 \\ \lambda t_1 + \lambda^2 t_1 t_2 & \text{para } t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

Caso não uniforme:

Se os pontos t_i possuem uma densidade não uniforme $\lambda(t)$, como em

$$P[k \text{ em } (t_1, t_2)] = \exp\left[-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt\right] \frac{\left[\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt\right]^k}{k!}$$

então os resultados ainda são válidos se o produto $\lambda(t_2 - t_1)$ for trocado pela integral de $\lambda(t)$ de t_1 a t_2 .

Então,

$$E[X(t)] = \int_0^t \lambda(\alpha) d\alpha$$

e

$$R(t_1 - t_2) = \int_0^{t_1} \lambda(t) dt \left[1 + \int_0^{t_2} \lambda(t) dt \right] \quad t_1 \leq t_2$$

Caminhada Aleatória (Random Walk)

É um processo de Markov.

Possui muitas aplicações em engenharia e física.

Suponha que um homem comece uma caminhada aleatória iniciando em um dado ponto seguindo uma linha reta.

Com probabilidade p ele dá um passo para a direita e alternativamente ele dá um passo a esquerda com probabilidade $q = 1 - p$.

Cada passo tem comprimento l [m]

Cada passo é completado em τ_s [s]

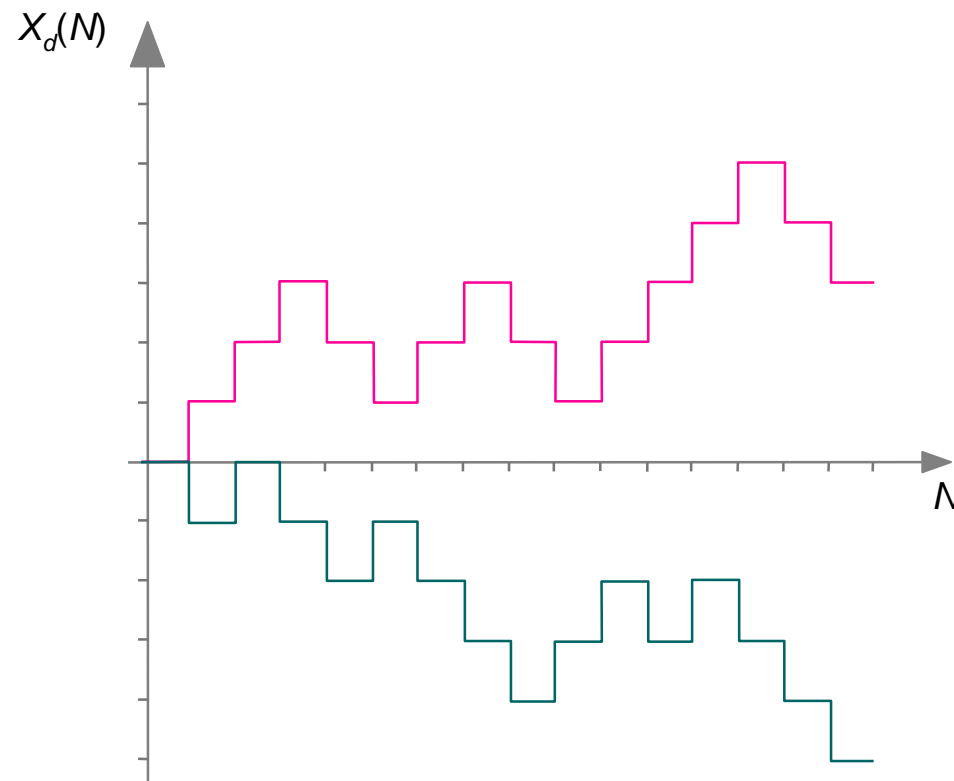
Após N passos, o homem está posicionado a $X_d(N)$ passos da origem.

Note que $-N \leq X_d(N) \leq N$.

Se $X_d(N)$ é positiva, o homem está localizado à direita da origem.

Se $X_d(N)$ é negativa, o homem está localizado à esquerda da origem.

A probabilidade da localização do homem estar n passos da origem após ele ter dado N passos é $P[X_d(N) = n]$, sendo $-N \leq n \leq N$.



Os passos são dados de forma independente!

Portanto, a direção tomada no N -ésimo passo é independente de $X_d(k)$, onde $0 \leq k \leq N-1$.

Assim,

$$P[X_d(N+1) = X_d(N) + 1] = p$$

$$P[X_d(N-1) = X_d(N) - 1] = q = 1-p$$

Seja $R_{n0} = n^0$ de passos para a direita e $L_{n0} = n^0$ de passos para a esquerda.

Isto colocará o homem a n passos da origem após ele completar o total de N passos ($-N \leq n \leq N$). Então,

$$R_{n0} - L_{n0} = n$$

$$R_{n0} + L_{n0} = N$$

Valores inteiros para R_{n0} e L_{n0} só existem se $(N-n)$ e $(N+n)$ forem pares.

Assim,

$$R_{n0} = \frac{N+n}{2}$$

$$L_{n0} = \frac{N-n}{2}$$

Após dar um total de N passos, não é possível atingir n passos (para a direita da origem) se os valores inteiros de R_{n0} e L_{n0} não existirem.

Se for possível atingir n passos (para a direita da origem após um total de N passos), então **não** é possível alcançar $n \pm 1$ passos (para a direita da origem).

Existem múltiplas seqüências de N passos, R_{n0} para a direita e L_{n0} para a esquerda, que um indivíduo pode dar para garantir que ele esteja a n passos à direita da origem. O número destas seqüências é dado por

$$\binom{N}{R_{n0}} = \frac{N!}{R_{n0}! L_{n0}!}$$

Esta quantidade representa o número de subconjuntos de tamanho R_{n0} que pode ser formado a partir de N objetos distintos. Estas seqüências são eventos mutuamente exclusivos e equiprováveis. A probabilidade de cada seqüência é:

$$P(R_{n0} \text{ passos para a direita em uma seqüência específica}) = p^{R_{n0}} q^{L_{n0}}$$

$$P(L_{n0} \text{ passos para a esquerda em uma seqüência específica}) = p^{R_{n0}} q^{L_{n0}}$$

A probabilidade $P[X_d(N) = n]$ pode então ser obtida utilizando Bernoulli:

$$P[X_d(N) = n] = \begin{cases} \frac{N!}{R_{n0}! L_{n0}!} p^{R_{n0}} q^{L_{n0}} & \text{se } R_{n0} \text{ e } L_{n0} \text{ existirem} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dado n e N , se não houver solução para $R_{n0} - L_{n0} = n$ e $R_{n0} + L_{n0} = N$, isto é, se R_{n0} e L_{n0} não existirem, então não será possível chegar a n passos da origem dando N passos e $P[X_d(N) = n] = 0$.

Note que a equação acima é exatamente a probabilidade de um indivíduo dar R_{n0} passos à direita dado que ele deu N passos independentes.

Generalização para a origem diferente da posição 0:

Vamos assumir que um indivíduo inicia sua caminhada aleatória a m passos à direita da origem.

Após ele completar N passos independentes, temos a probabilidade de ele estar a n passos à direita da origem dado que ele iniciou a m passos a direita da origem dada por $P[X_d(N) = n \mid X_d(0) = m]$.

Seja $v = n - m$ a quantidade que denota que a rede do indivíduo cresce em número de passos para a direita após completar N passos.

R_{nm} = nº de passos para a direita que são necessários para que o indivíduo inicie em m e termine em n passos para a direita da origem.

L_{nm} = nº de passos para a esquerda que são necessários para que o indivíduo inicie em m e termine em n passos para a esquerda da origem.

Então,

$$R_{nm} - L_{nm} = \nu$$

$$R_{nm} + L_{nm} = N$$

Logo,

$$R_{nm} = \frac{N + \nu}{2}$$

$$L_{nm} = \frac{N - \nu}{2}$$

Isto só é válido se $|\nu| \leq N$ e se $(N - \nu)$ e $(N + \nu)$ forem pares.

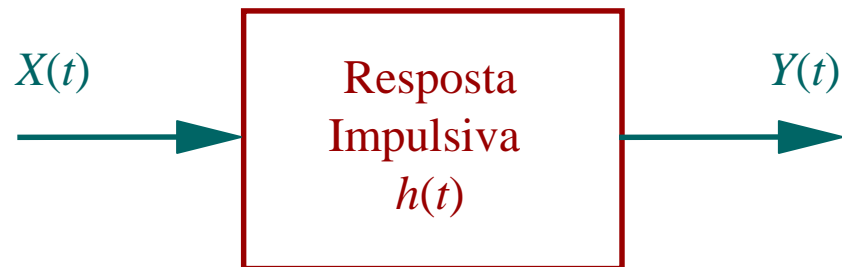
Caso contrário, R_{nm} e L_{nm} não existem e não é possível iniciar em m , dar N passos independentes e chegar em n passos para a direita da origem.

Supondo que R_{nm} e L_{nm} existem para algum n e m , então não é possível ir de m para $n \pm 1$ passos em um total de N passos. Assim,

$$P[X_d(N) = n \mid X_d(0) = m] = \begin{cases} \frac{N!}{R_{nm}!(N - R_{nm})!} p^{R_{nm}} q^{L_{nm}} & \text{se } R_{nm} \text{ e } L_{nm} \text{ existirem} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

9. TRANSMISSÃO DE PROCESSO ALEATÓRIO POR FILTRO LINEAR

Filtro linear invariante no tempo:



$X(t)$: processo aleatório estacionário no sentido amplo na entrada do filtro

$Y(t)$: processo aleatório na saída do filtro

Distribuição de probabilidade de $Y(t) \Rightarrow$ difícil de determinar, mesmo conhecendo a distribuição de probabilidade de $X(t)$ entre $-\infty < t < \infty$.

Obtenção da média e da função de autocorrelação de $Y(t)$ em termos da média e da função de autocorrelação de $X(t)$.

$X(t)$ = estacionário no sentido amplo.

Média de $Y(t)$:
$$m_Y(t) = E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau\right]$$

Se $E[X(t)]$ for finita para todo t e o sistema for estável, podemos escrever:

$$m_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)E[X(t-\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)m_X(t-\tau)d\tau$$

Quando $X(t)$ é WSS, a média é constante = m_X , então:

$$m_Y = m_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = m_X H(0)$$

onde $H(0)$ é a resposta em frequência do sistema para $f = 0$.

Função de autocorrelação do processo aleatório de saída $Y(t)$:

$$R_Y(t, u) = E[Y(t)Y(u)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(t - \tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)X(u - \tau_2)d\tau_2\right]$$

Considerando que o sistema é estável e que $E[X^2(t)]$ é finita, podemos re-arranjar a expressão acima:

$$R_Y(t, u) = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(t - \tau_1)h(\tau_1)X(u - \tau_2)h(\tau_2)d\tau_1d\tau_2\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t - \tau_1)X(u - \tau_2)]h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$

$$R_X[t - \tau_1, u - \tau_2]$$

Quando $X(t)$ é WSS, temos $\tau = t - u$, assim

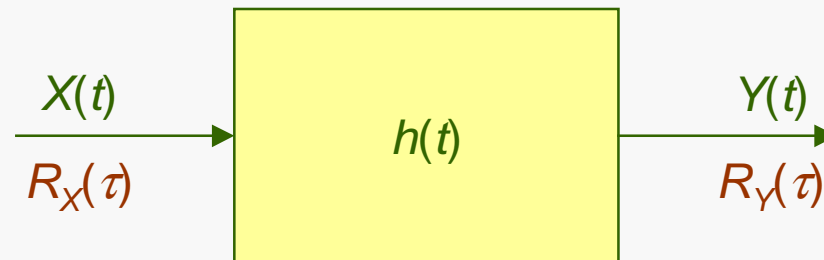
$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X[\tau - \tau_1 + \tau_2]h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$

Como $R_Y(0) = E[Y^2(t)]$, então o valor quadrático médio do processo aleatório $Y(t)$ de saída é dado por:

$$R_Y(0) = E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau_2 - \tau_1)d\tau_1d\tau_2 = \text{constante}$$

Resumindo:

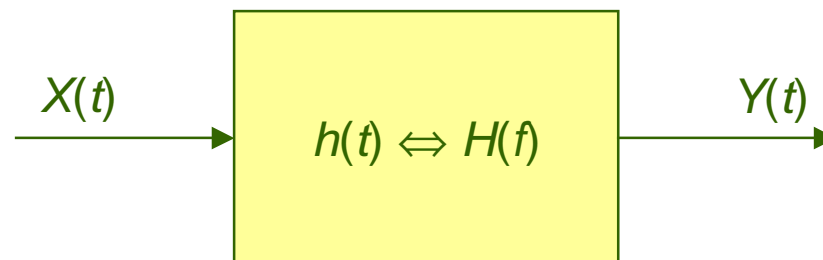
Para processos aleatórios WSS em sistemas lineares no domínio do tempo:



$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X[\tau - \tau_1 + \tau_2]h(\tau_1)h(\tau_2)d\tau_1d\tau_2$$

10. DENSIDADE ESPECTRAL DE POTÊNCIA:

Caracterização de processos aleatórios WSS em sistemas lineares no domínio da frequência.



Resposta ao impulso de um sistema linear:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(j2\pi ft) df$$

onde $H(f)$ é a função de transferência do sistema linear.

Substituindo $h(\tau_1)$ na expressão do $E[Y^2(t)]$, temos

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(j2\pi f \tau_1) df \right] h(\tau_2) R_X(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(f) h(\tau_2) R_X(\tau_2 - \tau_1) \exp(j2\pi f \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 df$$

definindo $\tau = \tau_2 - \tau_1$, podemos reescrever a expressão acima como:

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) \exp(j2\pi f \tau_2) d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau df$$

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) \exp(j2\pi f \tau_2) d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau df$$

\uparrow
 $H^*(f)$
 \uparrow
 $S_X(f)$

Assim,

$$E[Y^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f) df$$

onde $S_X(f)$ = densidade espectral de potência ou o espectro de potência de um processo aleatório $X(t)$ estacionário no sentido amplo.

Sistema linear invariante no tempo e estável.

Processo aleatório de entrada do sistema linear = WSS .

Propriedades da densidade espectral de potência:

Densidade espectral de potência de um processo aleatório $X(t)$ estacionário no sentido amplo (relações de Einstein-Wiener-Kintchine):

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

Logo,

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \exp(j2\pi f\tau) df$$

Propriedades:

a) $S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau$

b) $E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$

c) $S_X(f) \geq 0$

d) $S_X(-f) = S_X(f)$

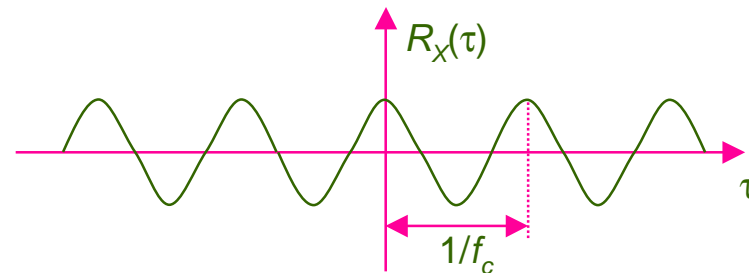
Exemplo: Onda senoidal com fase aleatória com A e f_c são constantes e fase com distribuição uniforme:

$$X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

$$f_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

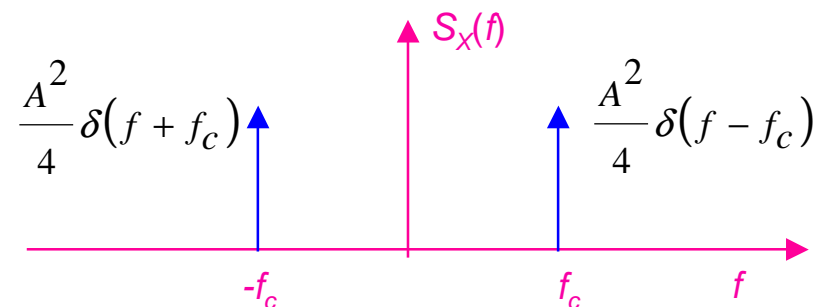
Função de autocorrelação:

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$$

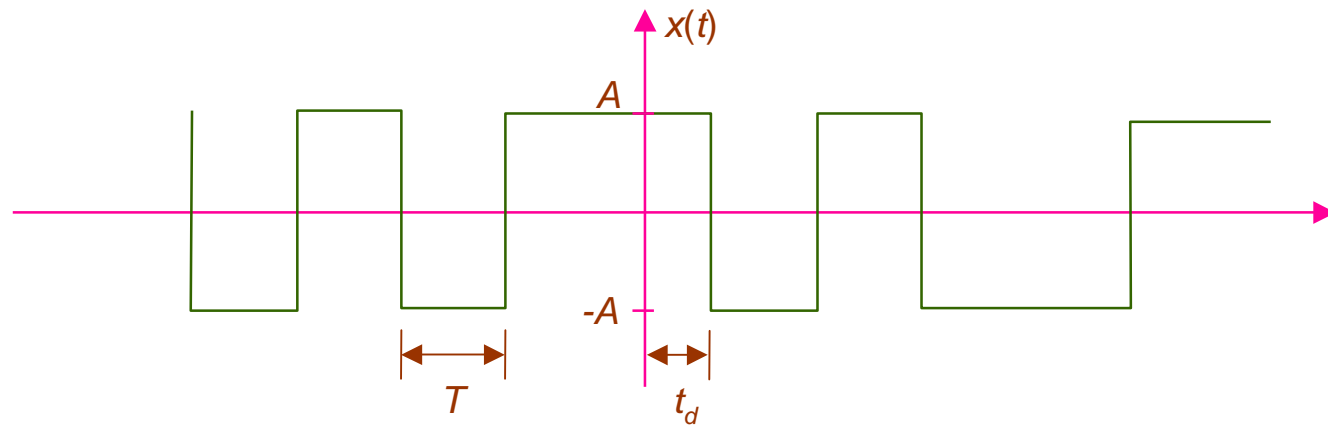


Fazendo a transformada de Fourier da autocorrelação, temos:

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f + f_c) + \delta(f - f_c)]$$

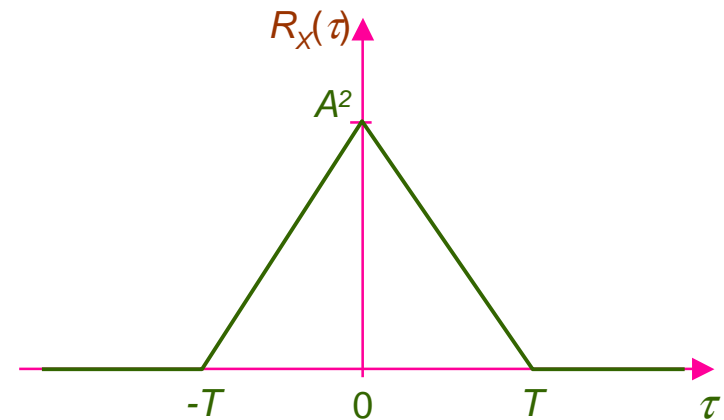


Área total sob $S_X(f) = A^2/2$

Exemplo: Onda binária aleatória

Função de autocorrelação:

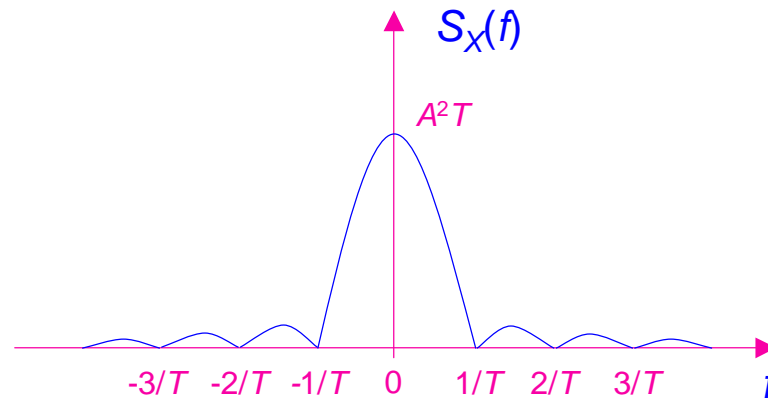
$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) & |\tau| < T \\ 0 & |\tau| \geq T \end{cases}$$



Densidade Espectral de Potência:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = \int_{-T}^T A^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

$$= A^2 T \operatorname{sinc}^2(fT)$$



Área sob a curva $S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2 T \operatorname{sinc}^2(fT) df = A^2 T \frac{1}{T} = A^2$

Generalização:

Note que a densidade espectral de energia de um pulso retangular $g(t)$ de amplitude A e duração T é dada por:

$$\Psi_g(f) = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT)$$

Assim,

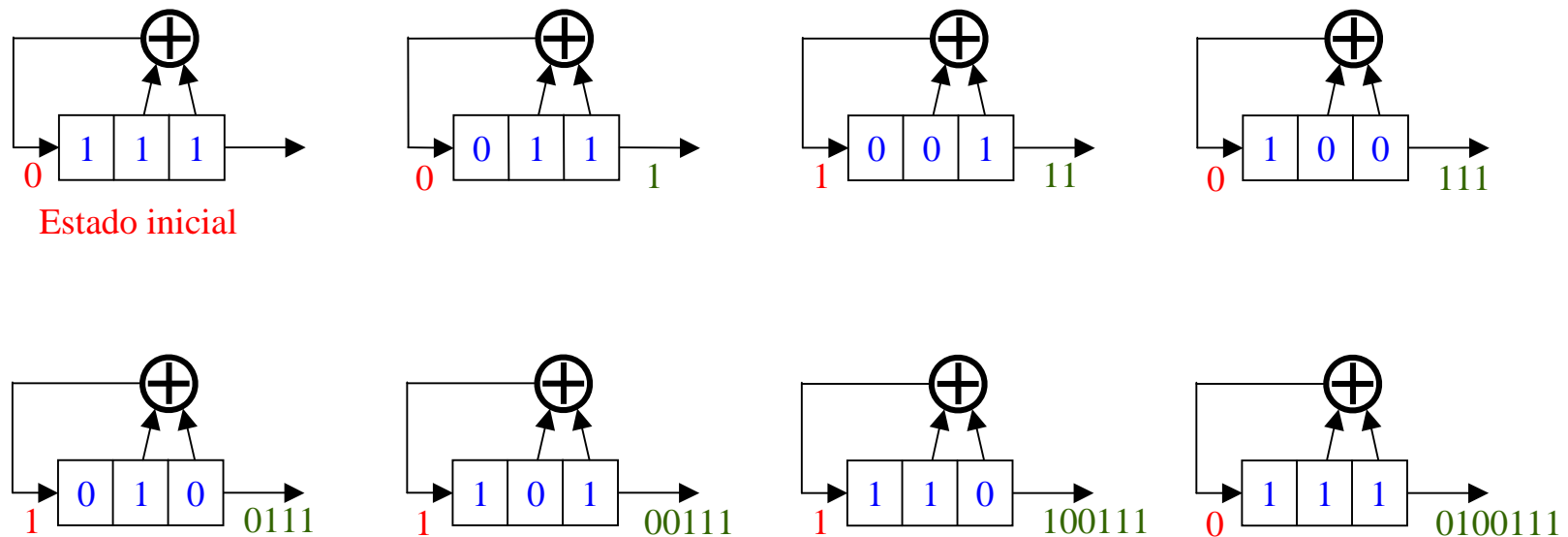
$$S_X(f) = \frac{\Psi_g(f)}{T}$$

Esta equação diz que, para uma onda binária aleatória com símbolos 0 e 1 representados por $g(t)$ e $-g(t)$, respectivamente, a densidade espectral de potência $S_X(f)$ é igual a densidade espectral de energia do pulso formatador do símbolo $g(t)$ dividido pela duração do símbolo T .

Exemplo: Seqüências de comprimento máximo

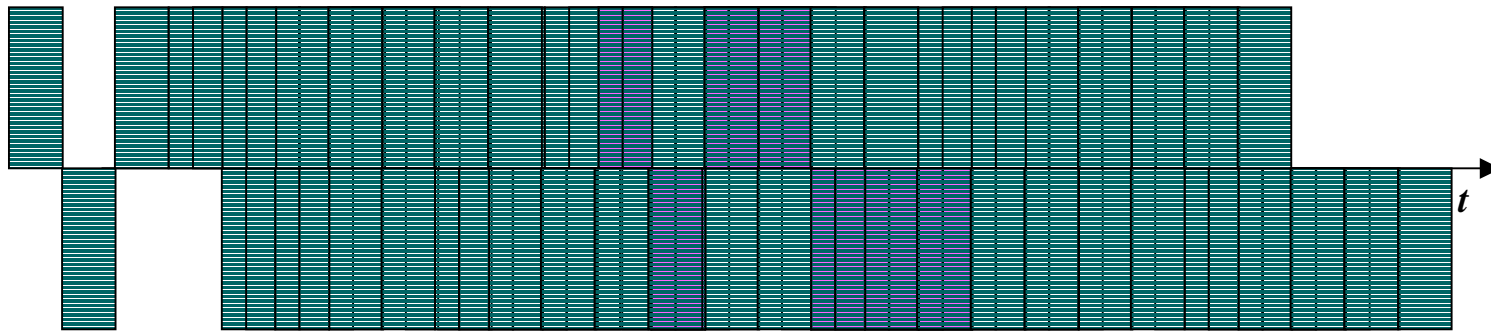
Seqüências binárias geradas por um registrador de deslocamento com realimentação e com período o mais longo possível. São geradas por **polinômios primitivos** (conexões = coeficientes do polinômio).

Número de memórias = 3, gera seqüência de comprimento = $2^3 - 1 = 7$.



Se o número de memórias igual a m , gera seqüência de comprimento $N = 2^m - 1$

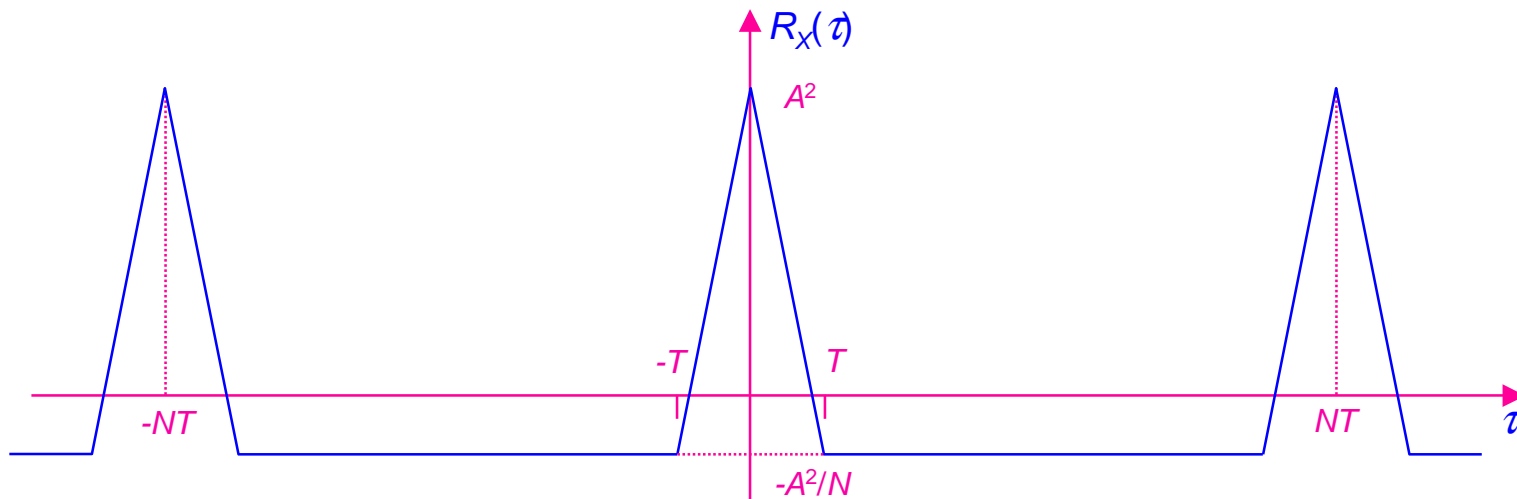
Função de autocorrelação de uma seqüência de máximo comprimento é periódica com período $7T$:



Consideramos que $0 = +A$ e $1 = -A$

Função de autocorrelação de uma seqüência de máximo comprimento é periódica com período NT , para valores de τ dentro do intervalo $-NT/2 \leq \tau \leq NT/2$, e é dada por:

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{N+1}{NT} |\tau| \right) & |\tau| \leq T \\ -\frac{A^2}{N} & \text{para o restante do período} \end{cases}$$



Características da função de autocorrelação:

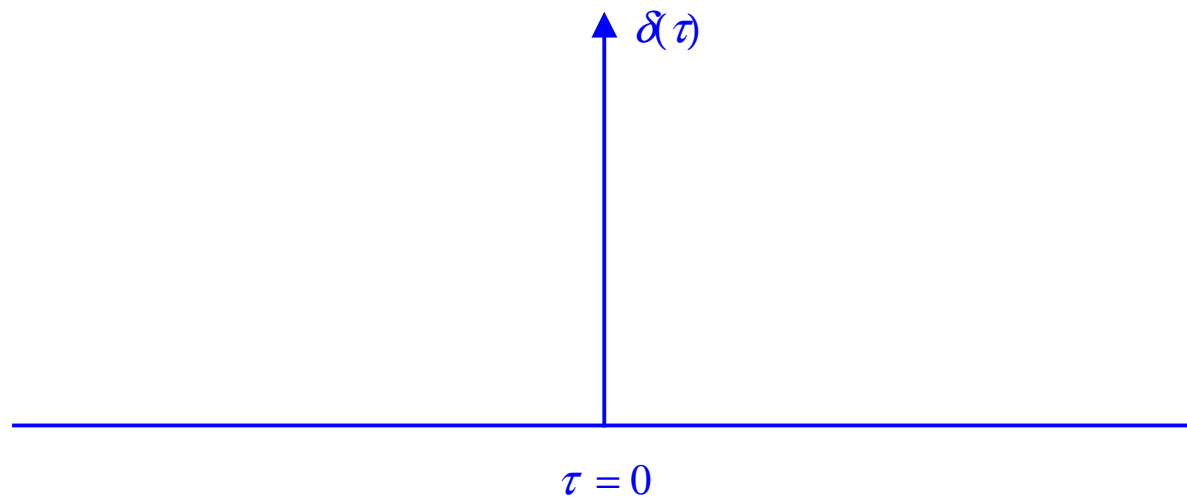
- um valor de pico distinto
- um natureza periódica

Seqüências máximas lineares = seqüências pseudo-aleatórias = seqüências de pseudo-ruído (PN)

São adequadas para uso em sincronização entre receptor e transmissor.

Seqüências máximas lineares possuem as seguintes propriedades:

- n° de 1's por período = n° de 0's mais um,
- em cada período, $1/2$ das saídas consecutivas de mesmo tipo (1's ou 0's) são de comprimento 1, $1/4$ são de comprimento 2, $1/8$ são de comprimento 3, etc.
- a função de autocorrelação possui apenas 2 valores para $N \rightarrow \infty$.



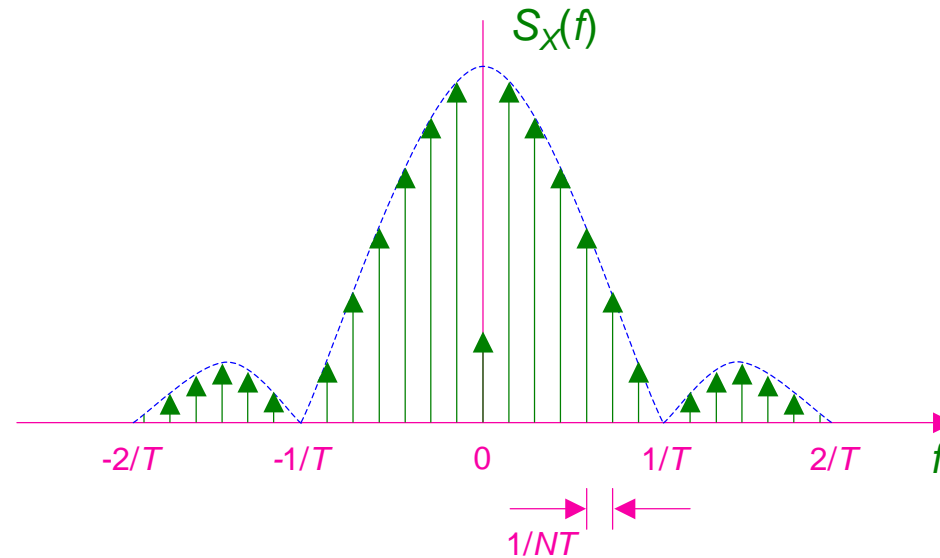
A função de autocorrelação consiste de um termo constante = $-A^2/N$ mais um trem de pulsos triangulares de amplitude máxima = A^2 , largura = $2T$ e período = NT , no domínio de τ .

$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2 \left(1 - \frac{N+1}{NT} |\tau| \right) & |\tau| \leq T \\ -\frac{A^2}{N} & \text{para o restante do período} \end{cases}$$

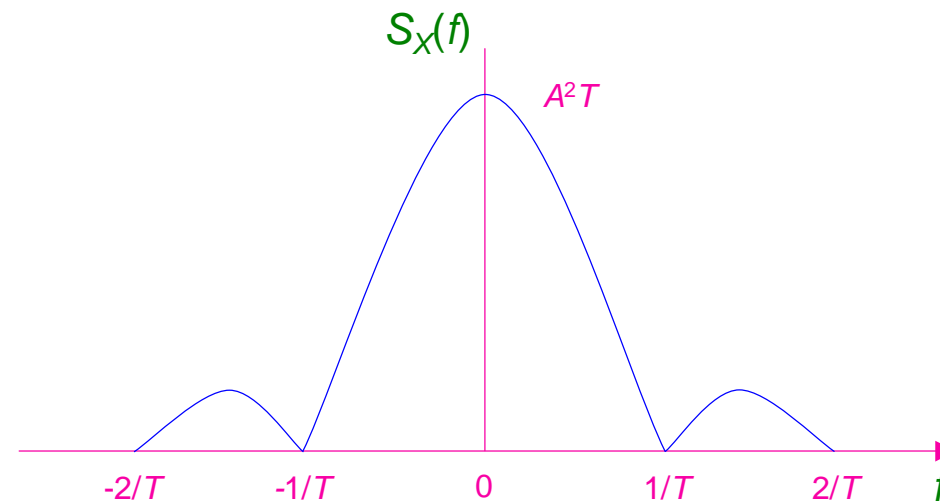
Então, tomando a transformada de Fourier de $R_X(t)$ obtemos a densidade espectral de potência dada por:

$$\begin{aligned} S_X(f) &= -\frac{A^2}{N} \delta(f) + \frac{A^2}{N} \left(1 + \frac{1}{N} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 \left(\frac{n}{N} \right) \delta \left(f - \frac{n}{NT} \right) \\ &= \frac{A^2}{N^2} \delta(f) + A^2 \left(\frac{N+1}{N^2} \right) \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \text{sinc}^2 \left(\frac{n}{N} \right) \delta \left(f - \frac{n}{NT} \right) \end{aligned}$$

Densidade espectral de potência de uma seqüência binária de período igual a T :



Densidade espectral de potência de uma seqüência binária aleatória infinita ($N \rightarrow \infty$):



Exemplo: Processo aleatório $X(t)$ estacionário no sentido amplo modulado

$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

onde a fase Θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 2π .

Autocorrelação de $Y(t)$: $R_Y(\tau) = E[Y(t + \tau)Y(t)]$

$$= E[X(t + \tau)\cos(2\pi f_c(t + \tau) + \Theta)X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta)]$$

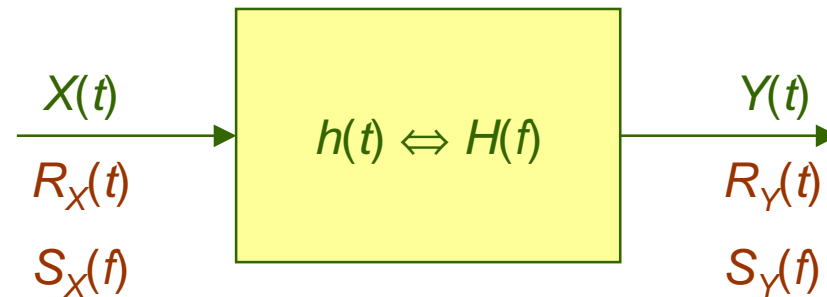
$$= E[X(t + \tau)X(t)] E[\cos(2\pi f_c(t + \tau) + \Theta)\cos(2\pi f_c t + \Theta)]$$

$$= \frac{R_X(\tau)}{2} E[\cos(2\pi f_c \tau) + \cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\Theta)]$$

$$= \frac{R_X(\tau)}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$$

Densidade espectral de potência de $Y(t)$: $S_Y(f) = \frac{1}{4}[S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c)]$

Transmissão de Processos Aleatórios por Sistemas Lineares:



Relação entre a autocorrelação de entrada e de saída:

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2) d\tau_1 d\tau_2$$

Relação entre a densidade espectral de potência de entrada e de saída:

$$S_Y(f) = H(f) H^*(f) S_X(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

11. FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO CRUZADA:

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t-\tau)]$$

$$R_{YX}(\tau) = E[Y(t)X(t-\tau)]$$

- **não** é função par em τ .
- **não** possui máximo na origem ($\tau = 0$).
- obedece a relação $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$.

Exemplo: Processos aleatórios modulados em quadratura:

$$X_1(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

$$X_2(t) = X(t)\sen(2\pi f_c t + \Theta)$$

onde Θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 2π .

Correlação cruzada entre $X_1(t)$ e $X_2(t)$:

$$\begin{aligned} R_{12}(\tau) &= E[X_1(t)X_2(t-\tau)] \\ &= E[X(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta)X(t-\tau)\sen(2\pi f_c(t-\tau) + \Theta)] \\ &= E[X(t)X(t-\tau)]E[\cos(2\pi f_c t + \Theta)\sen(2\pi f_c(t-\tau) + \Theta)] \\ &= \frac{R_X(\tau)}{2} E[\sen(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + 2\Theta) + \sen(2\pi f_c \tau)] \\ &= \frac{R_X(\tau)}{2} \sen(2\pi f_c \tau) \end{aligned}$$

Para $\tau = 0$: $R_{12}(0) = 0 \Rightarrow X_1(t)$ e $X_2(t)$ são ortogonais.

Densidades espectrais cruzadas:

$$S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

$$S_{YX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau$$

As funções densidade espectral de potência cruzadas **não** são necessariamente funções reais da frequência, entretanto, como temos que:

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$$

a seguinte relação também é válida:

$$S_{XY}(f) = S_{YX}(-f) = S_{YX}^*(f)$$

Portanto, a soma de $S_{XY}(f)$ com $S_{YX}(f)$ é real.

Exemplo: Densidade espectral de potência de $Z(t) = X(t) + Y(t)$

$X(t)$ e $Y(t)$: processos aleatórios com média zero e WSS.

Função de autocorrelação de $Z(t)$:

$$\begin{aligned}R_Z(\tau) &= E[Z(t)Z(t-\tau)] = E[(X(t)+Y(t))(X(t-\tau)+Y(t-\tau))] \\ &= E[X(t)X(t-\tau)] + E[X(t)Y(t-\tau)] + E[Y(t)X(t-\tau)] + E[Y(t)Y(t-\tau)] \\ &= R_X(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_Y(\tau)\end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados, temos:

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_{XY}(f) + S_{YX}(f) + S_Y(f)$$

Quando $X(t)$ e $Y(t)$ são descorrelacionados $\Rightarrow S_{XY}(f) = S_{YX}(f) = 0$, então

$$S_Z(f) = S_X(f) + S_Y(f)$$

13. PROCESSO GAUSSIANO

Suponha a observação de um processo aleatório $X(t)$ por um intervalo que se inicia em $t = 0$ e dura até $t = T$.

Suponha também que $X(t)$ seja ponderada por uma função $g(t)$ e que este resultado seja integrado sobre o intervalo de observação resultando em:

$$Y = \int_0^T g(t)X(t)dt$$

onde Y é denominado de uma funcional linear de $X(t)$.

O valor da variável aleatória Y depende do curso da função argumento $g(t)X(t)$ sobre o intervalo de observação de 0 a T .

Então, uma **funcional** é uma quantidade que depende do curso completo de uma ou mais funções ao invés de um número discreto de variáveis.

Assim, o domínio de uma funcional é um conjunto de funções admissíveis ao invés de uma região de um espaço de coordenadas.

Se a função de ponderação $g(t)$ for tal que o valor quadrático médio da variável aleatória Y seja finito e se Y for uma variável aleatória com **distribuição gaussiana** para todo $g(t)$ nesta classe de funções, então $X(t)$ é denominado de **um processo gaussiano**.

Em outras palavras, o processo $X(t)$ é um processo gaussiano se toda funcional linear de $X(t)$ for uma variável aleatória gaussiana.

Quando um processo gaussiano $X(t)$ é amostrado no tempo t_i , o resultado é uma variável aleatória gaussiana $X(t_i)$.

Seja $m(t_i)$ a média e $\sigma^2(t_i)$ a variância de $X(t_i)$, então a função densidade de probabilidade de $X(t_i)$ é dada por:

$$f_{X(t_i)}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(t_i)}} \exp\left[-\frac{(x_i - m(t_i))^2}{2\sigma^2(t_i)}\right]$$

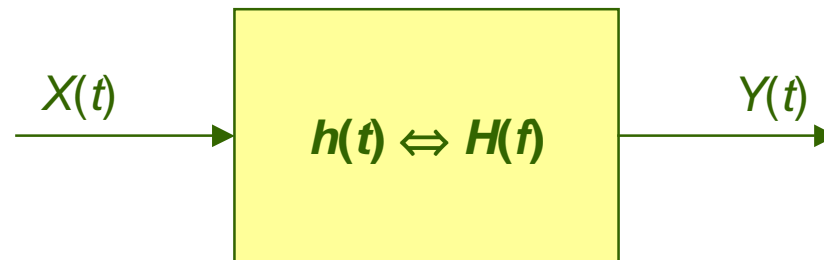
Processo gaussiano:

- possui muitas propriedades que fazem os resultados analíticos possíveis;
- processos aleatórios produzidos por fenômenos naturais são freqüentemente gaussianos;
- teorema do limite central fornece uma justificativa matemática para o uso de processo gaussiano como modelo para um grande número de fenômenos físicos.

Propriedades de um processo gaussiano:

1. Se um processo gaussiano $X(t)$ é aplicado na entrada de um filtro linear estável, então o processo aleatório $Y(t)$ na saída é também gaussiano.

Dem.:



$$Y(t) = \int_0^T h(t-\tau)X(\tau)d\tau \quad 0 \leq t < \infty$$

onde T é o tempo de observação da entrada $X(t)$.

Assumimos que $h(t)$ é tal que o valor quadrático médio de $Y(t)$ é finito para $0 \leq t < \infty$.

Para demonstrar que $Y(t)$ é gaussiana basta mostrar que qualquer funcional linear dela é uma variável aleatória gaussiana.

Define-se então a v.a.:

$$Z = \int_0^{\infty} g_Y(t)Y(t)dt = \int_0^{\infty} g_Y(t) \int_0^T h(t-\tau)X(\tau)d\tau dt$$

Assim, Z deve ser uma v.a. gaussiana para toda função $g_Y(t)$, tal que o valor quadrático médio de Z seja finito. Fazendo:

$$g(\tau) = \int_0^{\infty} g_Y(t)h(t-\tau)dt$$

obtemos:

$$Z = \int_0^T g(t)X(t)dt$$

Como $X(t)$ é um processo gaussiano, então Z deve ser uma v.a. gaussiana \Rightarrow
 $Y(t)$ é também um processo gaussiano.

QED

2. Seja um conjunto de variáveis aleatórias ou amostras $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ de um processo gaussiano $X(t)$, então estas variáveis aleatórias são conjuntamente gaussianas, com a função densidade de probabilidade conjunta sendo completamente especificada pelos conjunto das médias e das funções de autocorrelação:

$$m_X(t_i) = E[X(t_i)]$$

$$R_X(t_k - t_i) = E[X(t_k)X(t_i)]$$

3. Se um processo gaussiano é WSS, então o processo também é estacionário no sentido estrito.

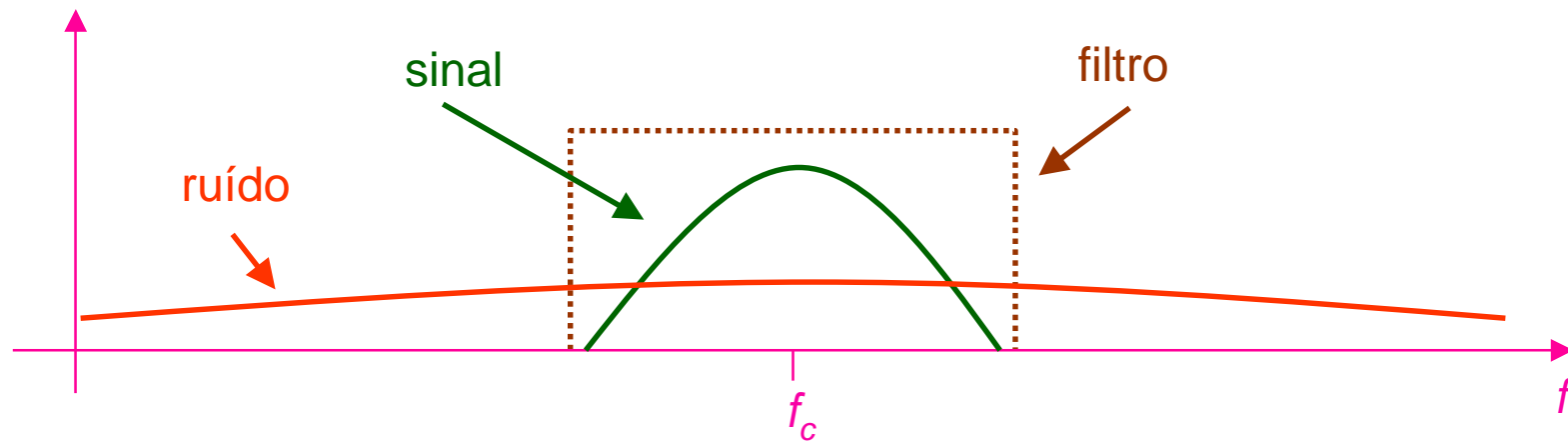
4. Se o conjunto de variáveis aleatórias ou amostras $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ de um processo gaussiano $X(t)$, são incorrelatas, isto é,

$$E[[X(t_k) - m_X(t_k)][X(t_i) - m_X(t_i)]] = 0 \quad i \neq k$$

então estas v.a. são estatisticamente independentes.

14. Processo Aleatório de Faixa Estreita

Receptor \Rightarrow filtragem de faixa estreita para restringir o ruído.



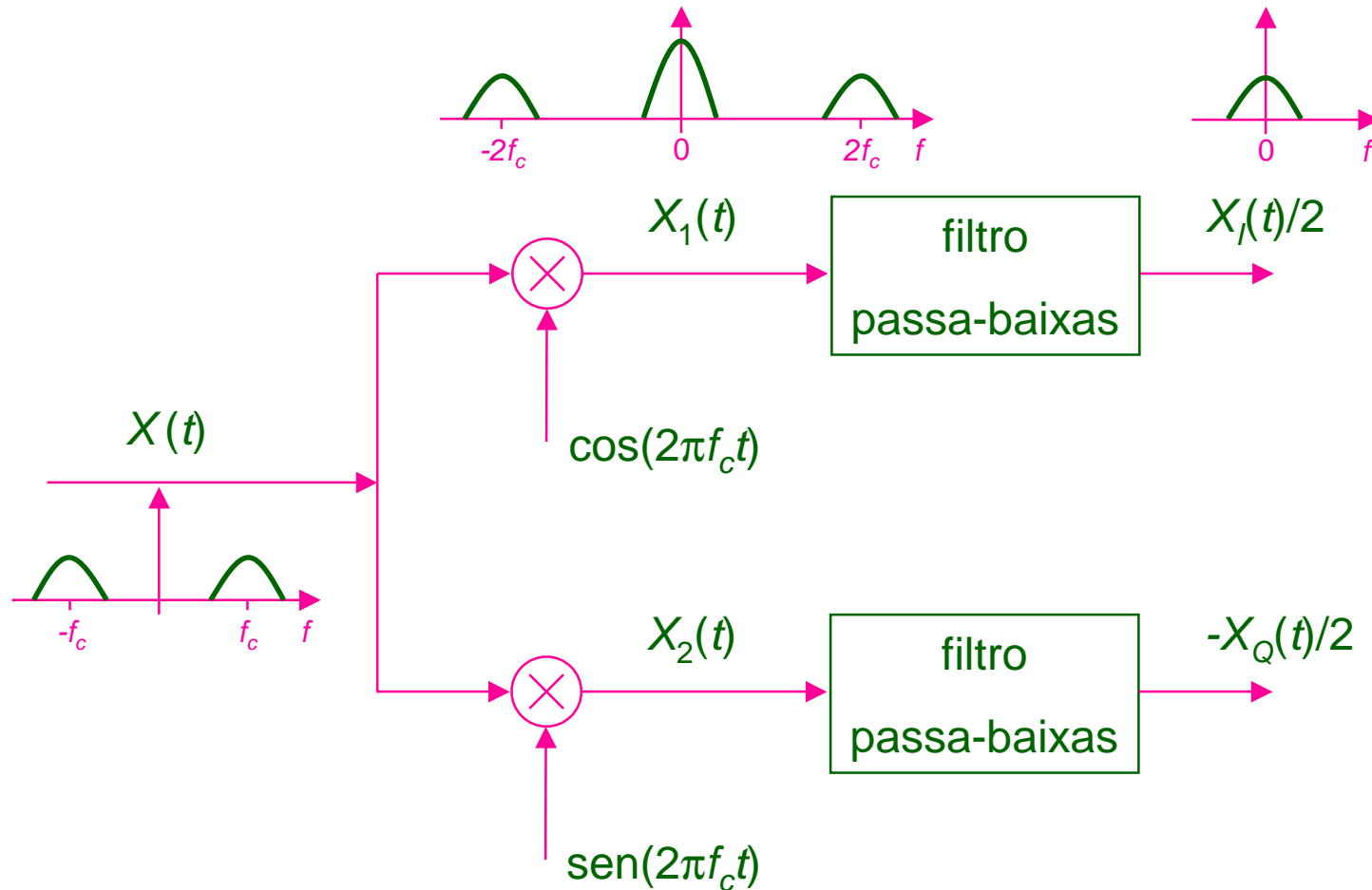
Sinal na saída do filtro de faixa estreita: função amostra de um processo aleatório de faixa estreita.

Forma canônica de representação do processo aleatório de faixa estreita $X(t)$ centrado em uma frequência f_c :

$$X(t) = X_I(t)\cos(2\pi f_c t) - X_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

$X_I(t)$ e $X_Q(t)$ = componentes em fase e em quadratura de $X(t)$, respectivamente.

Obtenção de $X_I(t)$ e $X_Q(t)$ (a menos de um fator de escala):



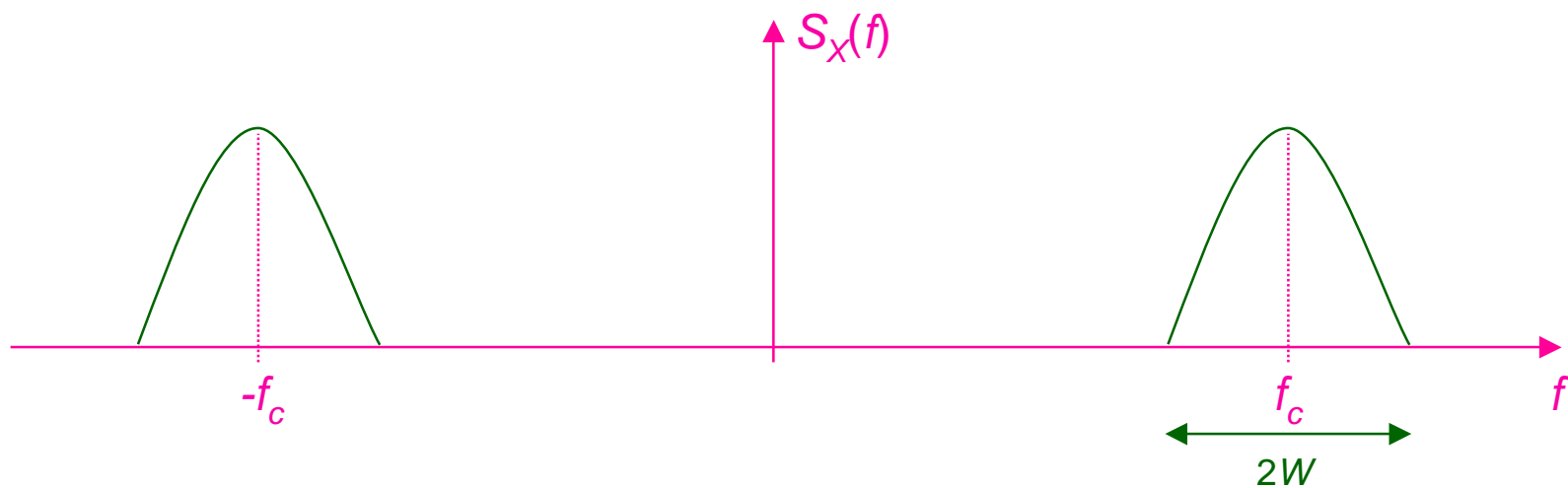
$$\cos(\alpha) = [\exp(j\alpha) + \exp(-j\alpha)]/2$$

$$\text{sen}(\alpha) = [\exp(j\alpha) - \exp(-j\alpha)]/2j$$

Suponha que o processo aleatório de faixa estreita $X(t)$ tenha as seguintes características:

1) a densidade espectral de potência de $X(t)$ satisfaz a condição:

$$S_X(f) = 0 \quad \text{para} \quad |f| \leq f_c - W \quad \text{e} \quad |f| \geq f_c + W$$



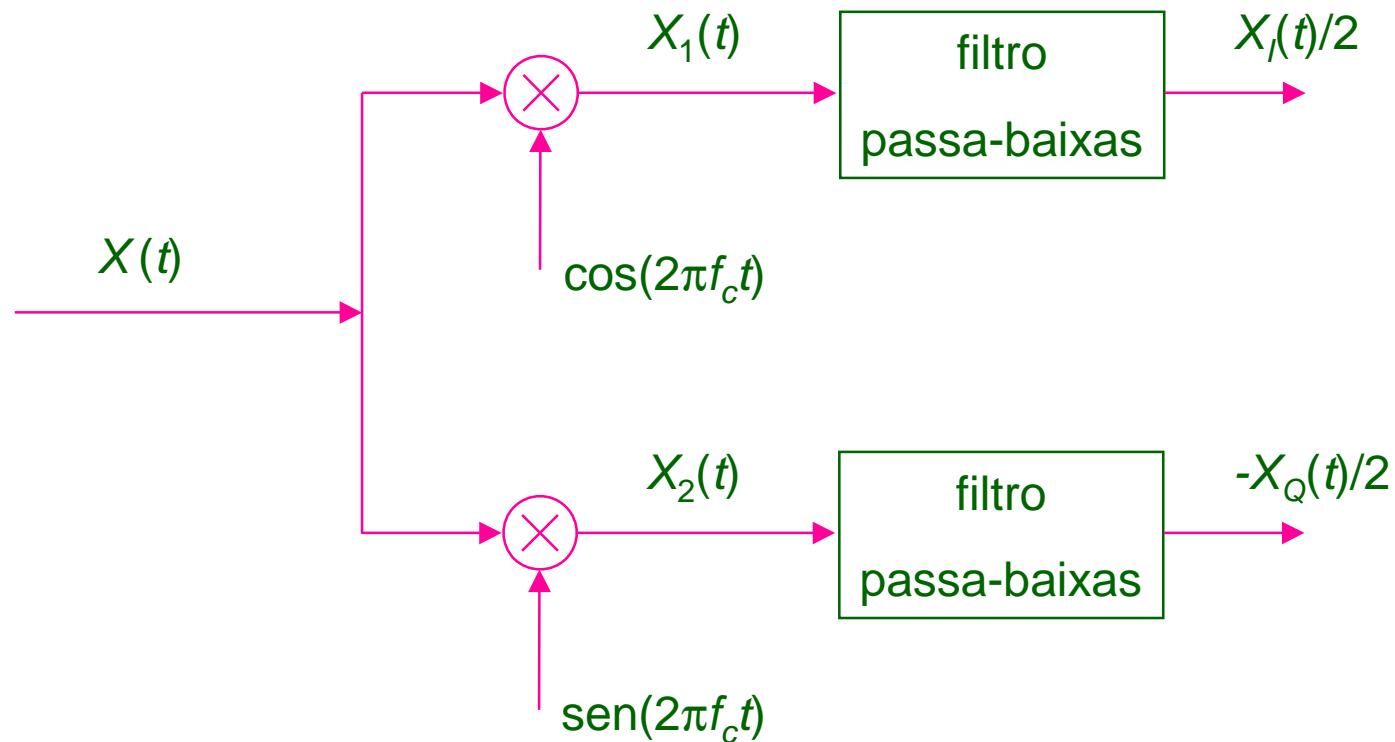
2) o processo $X(t)$ é gaussiano com média zero e variância σ_X^2 , a característica de média zero é uma consequência direta do fato de $X(t)$ ser de faixa estreita.

Propriedades dos processos aleatórios $X_I(t)$ e $X_Q(t)$:

- 1) A componente em fase $X_I(t)$ e a componente em quadratura $X_Q(t)$ de um processo aleatório $X(t)$ são ambos processos aleatórios de faixa estreita.
- 2) A componente em fase $X_I(t)$ e a componente em quadratura $X_Q(t)$ de um processo aleatório $X(t)$ possuem densidades espectrais de potência relacionada com a de $X(t)$ como se segue:

$$S_{X_I}(f) = S_{X_Q}(f) = \begin{cases} S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c) & -W < f < W \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

Prova:



Podemos extrair $X_I(t)$ e $X_Q(t)$ de $X(t)$ como se segue:

Obtém-se $X_1(t) = X(t)\cos(2\pi f_c t)$

$$X_2(t) = X(t)\text{sen}(2\pi f_c t)$$

onde as fases das duas portadoras foram feitas iguais a zero por conveniência.

$X_1(t)$ é filtrado por um FPB de faixa igual a W , resultando em $X_I(f)/2$.

$X_2(t)$ é filtrado por um FPB de faixa igual a W , resultando em $X_Q(f)/2$.

A densidade espectral de potência do processo modulado $X_1(t)$ é relacionada com a do processo aleatório de faixa estreita $X(t)$ como se segue:

$$S_{X_1}(f) = \frac{1}{4} [S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c)]$$

A parte que cai dentro da faixa de passagem do FPB no caminho superior da figura define a densidade espectral de potência de $X(t)/2$.

Assim, pode-se expressar a densidade espectral de potência da componente em fase como:

$$S_{X_I}(f) = \begin{cases} S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c) & -W < f < W \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

Usando o mesmo argumento desenvolvido acima podemos obter a densidade espectral de potência da componente em quadratura:

$$S_{X_Q}(f) = \begin{cases} S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c) & -W < f < W \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

QED

- 3) A componente em fase $X_I(t)$ e a componente em quadratura $X_Q(t)$ possuem a mesma média e a mesma variância do processo aleatório $X(t)$ de faixa estreita.

Prova:

$E[X(t)] = 0 \Rightarrow E[X_I(t)] = 0$ e $E[X_Q(t)] = 0$ (versões filtradas de $X_1(t)$ e $X_2(t)$).

Como $E[X(t)] = 0 \Rightarrow$ variância de $X(t)$ = valor quadrático médio.

Como $E[X_I(t)] = E[X_Q(t)] = 0 \Rightarrow$ variância = valor quadrático médio = área total sob a curva do espectro de potência:

$$\begin{aligned}\sigma_{X_I}^2 &= \sigma_{X_Q}^2 = \int_{-W}^W [S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c)] df \\ &= \int_{f_c - W}^{f_c + W} S_X(f - f_c) df + \int_{f_c - W}^{f_c + W} S_X(f + f_c) df = \sigma_X^2\end{aligned}$$

onde σ_X^2 é a variância do processo $X(t)$ de faixa estreita de média zero.

Se o processo aleatório de faixa estreita $X(t)$ é gaussiano $\Rightarrow X_I(t)$ e $X_Q(t)$ são incorrelatas e gaussianas $\Rightarrow X_I(t)$ e $X_Q(t)$ são estatisticamente independentes.

Seja Y e Z variáveis aleatórias obtidas observando os processos aleatórios gaussianos $X_I(t)$ e $X_Q(t)$ em um tempo fixo t .

As funções densidade de probabilidade destas variáveis aleatórias com média zero e variância σ_X^2 são:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left[-\frac{y^2}{2\sigma_X^2}\right]$$

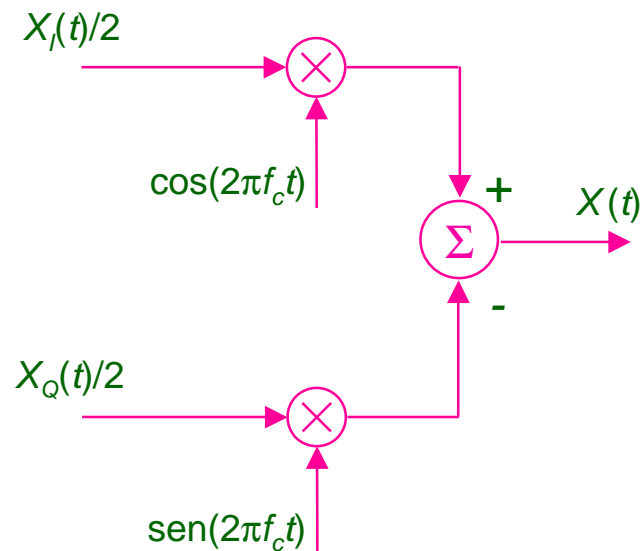
$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left[-\frac{z^2}{2\sigma_X^2}\right]$$

onde Y e Z são variáveis aleatórias estatisticamente independentes.

Então, a função densidade de probabilidade conjunta de Y e Z é dada por:

$$f_{Y,Z}(y,z) = f_Y(y) \cdot f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{(y^2 + z^2)}{2\sigma_X^2}\right]$$

Outra importante implicação destas propriedades é que podemos construir um processo gaussiano de faixa estreita $X(t)$ por meio do seguinte esquema:

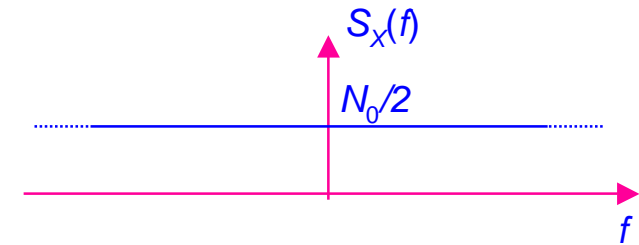


Processos gaussiano passa-baixas $X_I(t)$ e $X_Q(t)$ gerados por duas fontes independentes.

$X_I(t)$ e $X_Q(t)$ possuem média zero e mesma variância do processo $X(t)$.

Os processos $X_I(t)$ e $X_Q(t)$ são modulados individualmente por um par de portadoras senoidais em fase e em quadratura.

Os processos modulados resultantes são então somados para produzir o processo gaussiano de faixa estreita $X(t)$.

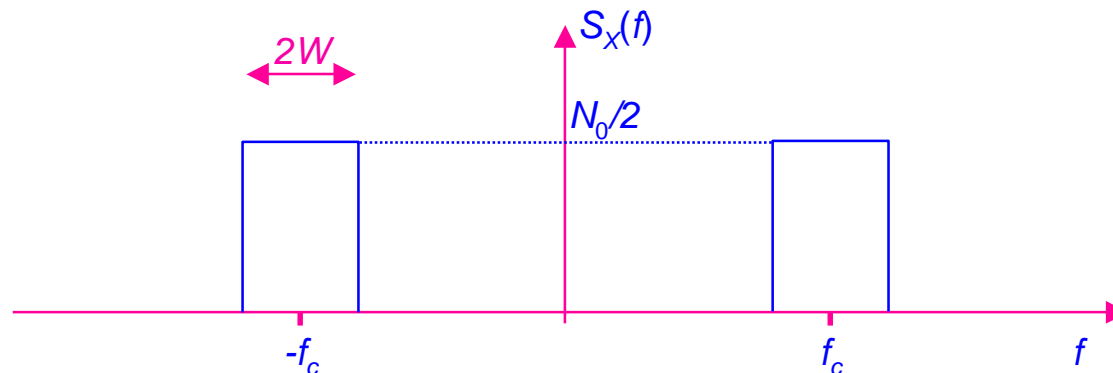
Exemplo: Processo ruidoso gaussiano branco

Densidade espectral de potência = cte

Qualquer duas amostras são estatisticamente independentes.

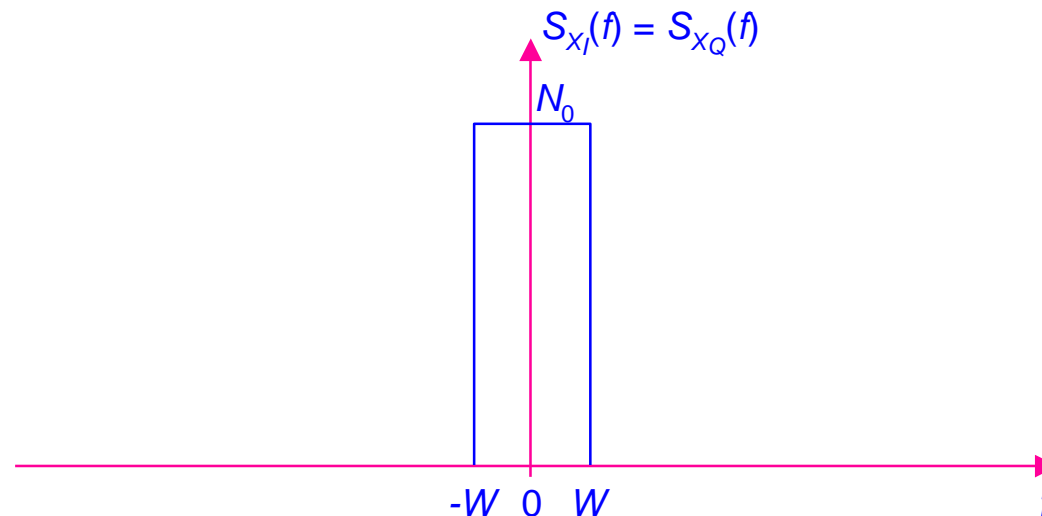
Suposição: **média = 0** e densidade espectral de potência = $N_0/2$.

Processo ruidoso é filtrado por um filtro ideal de faixa estreita resultando em um processo gaussiano de faixa estreita com **média = 0** e densidade espectral de potência:



Características estatísticas das componentes em fase e em quadratura de $X(t)$:

Seguindo o procedimento dado na propriedade 2 obtemos o espectro de potência da componente em fase $X_I(t)$ e da componente em quadratura $X_Q(t)$:



Assim, as variâncias dos processos $X(t)$, $X_I(t)$ e $X_Q(t)$ são idênticas e dadas por:

$$\sigma_X^2 = 2N_0W$$

As médias dos processos $X(t)$, $X_I(t)$ e $X_Q(t)$ são idênticas e iguais a zero.

Então, as funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias Y e Z obtidas pela observação de $X_I(t)$ e $X_Q(t)$, respectivamente, em um tempo fixo são dadas por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi N_0 W}} \exp\left[\frac{-y^2}{4N_0 W}\right]$$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi N_0 W}} \exp\left[\frac{-z^2}{4N_0 W}\right]$$

15. Envoltória e Fase do Processo Aleatório de Faixa Estreita

Processo aleatório de faixa estreita $X(t)$ pode ser representado pelas suas componentes de envoltória e fase, isto é,

$$X(t) = A(t) \cos[2\pi f_c t + \Phi(t)]$$

onde $A(t)$ é a envoltória e $\Phi(t)$ é a fase.

Relação com as componentes em fase $X_I(t)$ e em quadratura $X_Q(t)$ do processo $X(t)$:

$$A(t) = \sqrt{X_I^2(t) + X_Q^2(t)}$$

$$\Phi(t) = \arctan \left[\frac{X_Q(t)}{X_I(t)} \right]$$

Seja R e Ψ variáveis aleatórias obtidas observando os processos aleatórios $A(t)$ e $\Phi(t)$, respectivamente, em um tempo fixo.

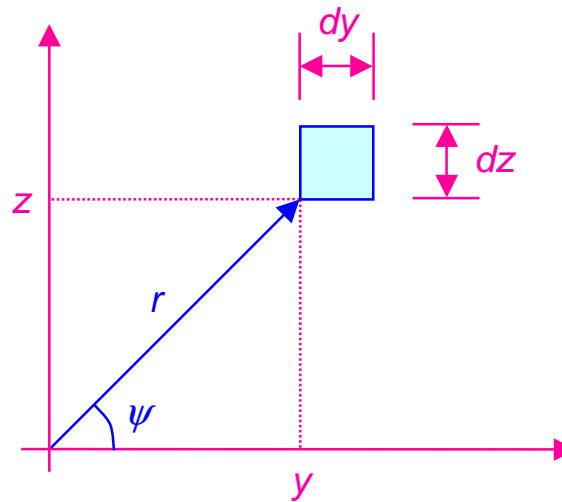
Seja Y e Z variáveis aleatórias obtidas pela observação de $X_I(t)$ e $X_Q(t)$, respectivamente, no mesmo tempo acima.

Relação entre as funções densidade de probabilidade de R e Ψ com as funções densidade de probabilidade de Y e Z :

Função densidade de probabilidade conjunta de Y e Z :

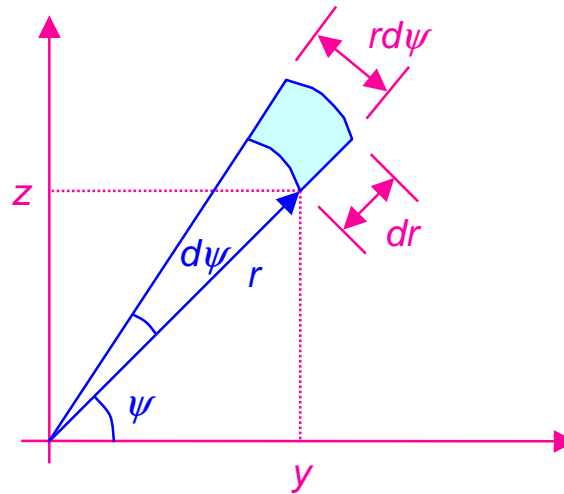
$$f_{Y,Z}(y,z) = f_Y(y)f_Z(z) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{(y^2 + z^2)}{2\sigma_X^2}\right]$$

A probabilidade conjunta da variável aleatória Y estar entre y e $y+dy$ e da variável aleatória Z estar entre z e $z+dz$ é dada por:



$$f_{Y,Z}(y,z)dydz = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left[-\frac{(y^2 + z^2)}{2\sigma_X^2}\right] dydz$$

Observando a figura abaixo, temos que:



$$y = r \cos(\psi) \quad \text{e} \quad z = r \sin(\psi)$$

r e ψ são valores amostras das variáveis aleatórias R e Ψ , respectivamente.

No caso limite, temos:

$$dydz = r drd\psi$$

Então, a probabilidade das variáveis aleatórias R e Ψ estarem dentro da área da figura anterior é dada por:

$$\frac{r}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left[\frac{-r^2}{2\sigma_X^2}\right] dr d\psi$$

ou seja, a função densidade de probabilidade conjunta de R e Ψ é dada por:

$$f_{R,\Psi}(r,\psi) = \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} \exp\left[\frac{-r^2}{2\sigma_X^2}\right]$$

Esta função densidade de probabilidade é independente de $\psi \Rightarrow$ as variáveis aleatórias R e Ψ são estatisticamente independentes, portanto

$$f_{R,\Psi}(r,\psi) = f_R(r) \cdot f_\Psi(\psi)$$

Em particular, temos:

Ψ é uniformemente distribuída:

$$f_{\Psi}(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \psi \leq 2\pi \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

Então, a função densidade de probabilidade de R fica:

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma_X^2} \exp\left[\frac{-r^2}{2\sigma_X^2}\right] & r > 0 \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$

A variável aleatória que possui a função densidade de probabilidade acima é denominada de **variável aleatória com distribuição Rayleigh**.

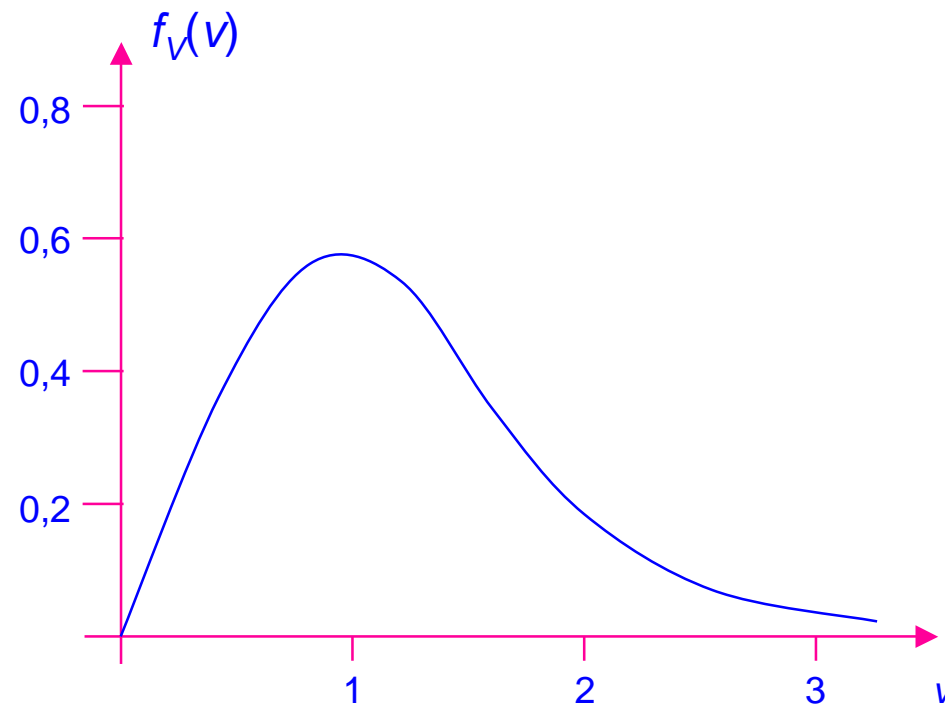
Para a conveniência na apresentação gráfica, fazemos;

$$v = \frac{r}{\sigma_X}$$

$$f_V(v) = \sigma_X f_R(r)$$

Assim, a distribuição de Rayleigh no formato padrão fica:

$$f_V(v) = \begin{cases} v \exp\left[-\frac{v^2}{2}\right] & v > 0 \\ 0 & \text{fora} \end{cases}$$



O pico da distribuição de Rayleigh $f_V(v)$ ocorre para $v = 1$ e é igual a 0,607.

Note que a distribuição de Rayleigh é zero para valores negativos de v , pois a função envoltória só pode assumir valores positivos.