

# **CAPÍTULO 9**

## ***Canais de Comunicações e Modelos***

## 9. Canais de Comunicações e Modelos

Canal de comunicação é tudo que se encontra entre a fonte e o destino de um sinal.

Meio físico situa-se entre o transmissor e o receptor.

### 9.1 Canais com Múltiplos Percursos e Desvanecimento

Múltiplos percursos: espalhamento atmosférico e refração, ou reflexões em edificações e outros objetos.

As múltiplas réplicas do sinal transmitido chegam com diferentes atenuações e diferentes atrasos ao receptor, sendo somados na sua antena.

O desvanecimento por multipercurso afeta o sinal de duas formas: dispersão (espalhamento no tempo ou seletividade em freqüência) e comportamento variante no tempo.

Modelagem e simulação do desvanecimento  $\Rightarrow$  comunicações sem fio móvel e em ambiente fechado.

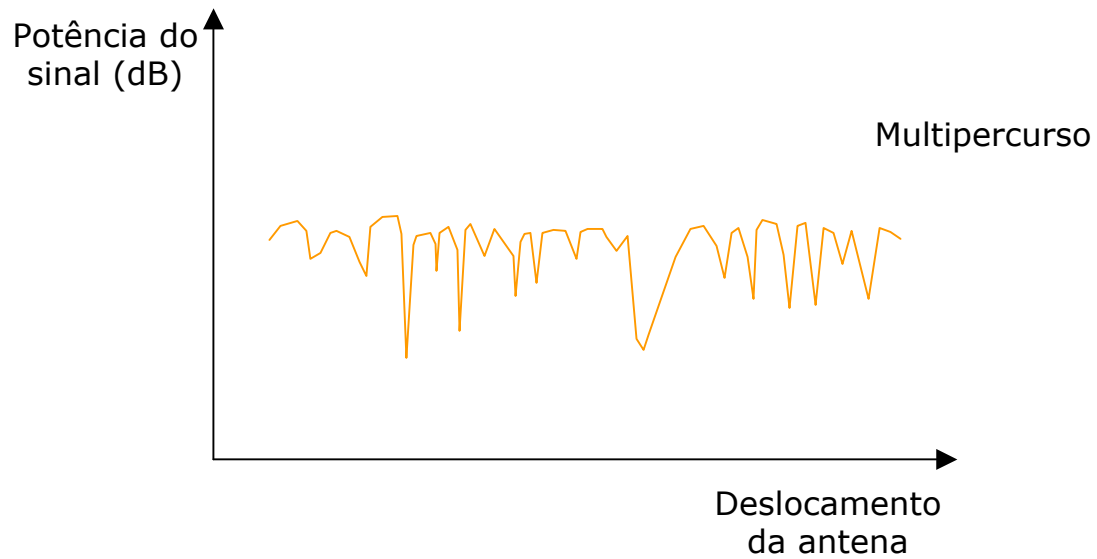
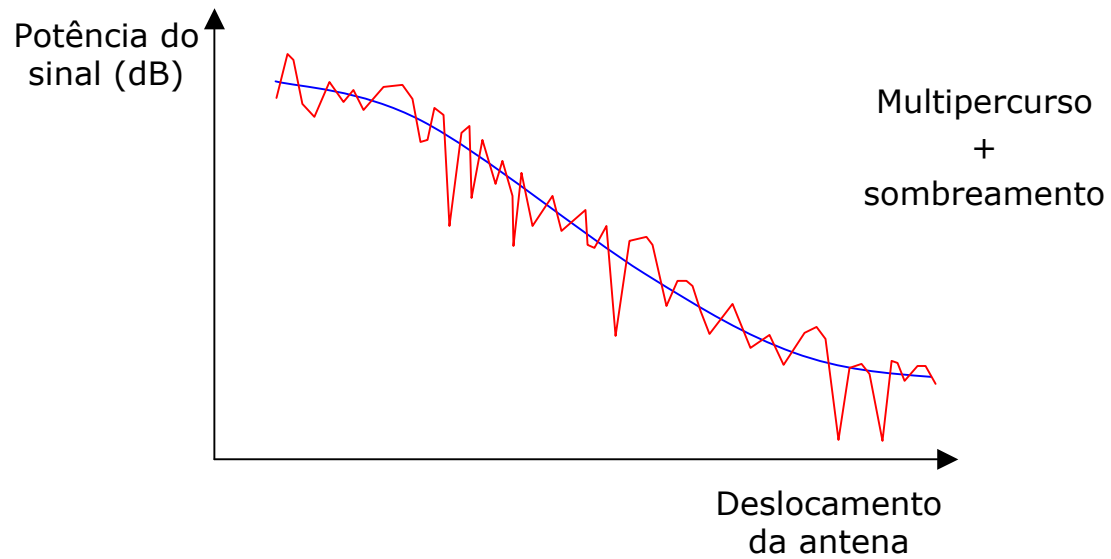
Comunicação móvel é afetada por:

- multipercurso (desvanecimento de pequena escala), e
- sombreamento (desvanecimento de larga escala), descrito por perda de percurso e por variações estatísticas em torno da média.

Resposta ao impulso na forma passa-baixas equivalente complexa:

$$\tilde{h}(\tau, t) = s(t) \times \tilde{c}(\tau, t)$$

onde  $s(t)$  é a componente de desvanecimento por sombreamento e  $\tilde{c}(\tau, t)$  é a componente de multipercurso.



## a) Desvanecimento por Sombreamento

Sinal recebido  $S_r$  [dBm] pelo móvel a partir de um transmissor:

$$S_r = S_t + G_t + G_r - L_p$$

$S_t$  = sinal transmitido [dBm]

$G_t$  = ganho da antena do transmissor [dB] – obtido do padrão de ganho, posição e orientação em relação ao móvel.

$G_r$  = ganho da antena do receptor [dB] – antena omnidirecional

$L_p$  = perda de propagação [dB] – mais difícil de ser obtido - ray-tracing, métodos estatísticos.

Modelos estatísticos de propagação para calcular a perda de propagação:

$$L_p = \alpha + \beta \log_{10} (R) \text{ [dB]}$$

$R$  = distância entre o transmissor e o receptor [km].

Portanto, a potência do sinal recebido [mW] é proporcional a  $R^{0,1\beta}$ .

Para propagação no espaço livre temos:

$$\alpha = -20 \log_{10}(\pi\lambda/4)$$

$$\beta = 20$$

Os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser determinados através de medidas experimentais para um sistema de rádio específico.

As medidas são tomadas a partir da média da potência do sinal recebido sobre vários comprimentos de ondas, de tal forma que a média dos efeitos do múltiplos percursos é feita em diferentes locais ao redor do transmissor.

Com as medidas pode-se traçar um gráfico de potência por logaritmo da distância. Uma reta construída por mínimos quadrados pode ser traçada. Assim, o coeficiente angular da reta é o  $\beta$  e o coeficiente linear é o  $\alpha$ .

Modelo de Hata:

$$\beta = 44,9 + 6,55\log_{10}(h)$$

$$\text{meio urbano: } \alpha = \alpha_0 = 69,55 + 26,16\log_{10}(f) - 13,82\log_{10}(h)$$

$$\text{meio suburbano: } \alpha = \alpha_0 - [5,4 + 2\log_{10}^2(f/28)]$$

$$\text{meio rural: } \alpha = \alpha_0 - [40,94 + 4,78\log_{10}^2(f/28) - 18,33\log_{10}(f)]$$

onde  $h$  [m] é a altura do transmissor em relação a elevação média do terreno e  $f$  [MHz] é a frequência.

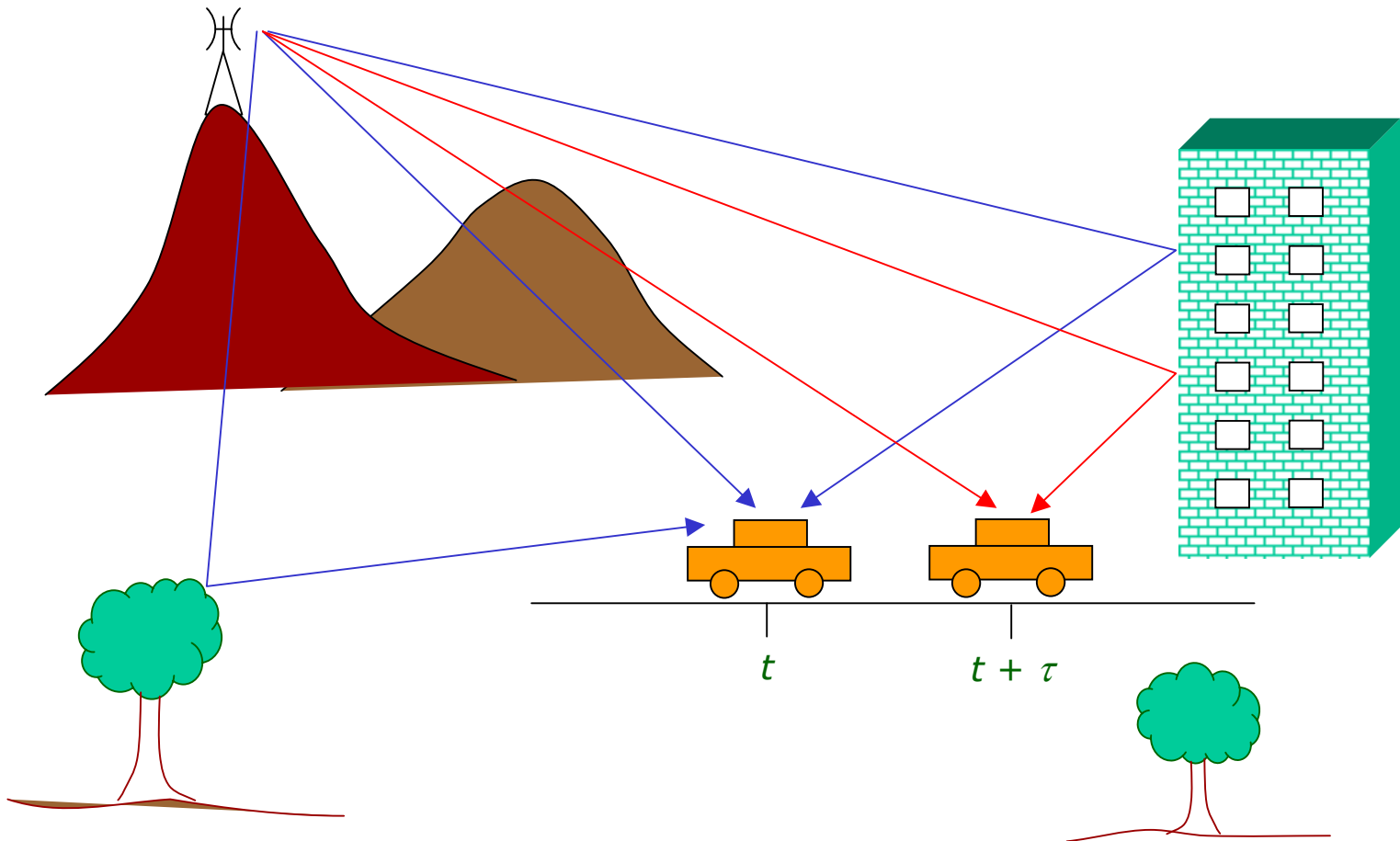
A componente de desvanecimento por sombreamento segue uma distribuição log-normal.

A potência média é estimada pela componente de sombreamento do modelo de propagação.

Para uma dada componente de sombreamento, a componente de desvanecimento por multipercurso segue uma distribuição Rayleigh ou de Rice.



## b) Desvanecimento por Múltiplos Percursos



O sinal transmitido segue diferentes percursos antes de chegar na antena do receptor.

O sinal resultante terá grandes flutuações  $\Rightarrow$  **desvanecimento!**

Categorias do desvanecimento por múltiplos percursos:

- 1ª) modelo de canal com um número pequeno e finito de componentes de multipercurso  $\Rightarrow$  **canal multipercurso discreto.**
- 2ª) modelo de canal com um número muito grande de componentes multipercurso  $\Rightarrow$  sinal é composto de componentes contínuas e não resolvíveis  $\Rightarrow$  **canal multipercurso difuso.**

Note que os canais podem conter ambas componentes discreta e difusa. Em todos os casos o canal é modelado como um sistema linear variante no tempo com resposta complexa equivalente passa-baixas

$$\tilde{C}(\tau, t)$$

## 1. Caracterização Passa-baixas Equivalente do Canal com Multipercursos:

$$y(t) = \sum_n a_n(t) s(t - \tau_n(t))$$

$a_n(t)$  = fator de atenuação do sinal recebido no  $n$ -ésimo percurso.

$\tau_n(t)$  = atraso de propagação no  $n$ -ésimo percurso.

$s(t)$  = sinal de entrada passa-faixa, dado por:

$$s(t) = \text{Re}\{\tilde{S}(t) \exp(j2\pi f_c t)\}$$

então,

$$y(t) = \text{Re}\left\{ \left[ \sum_n a_n(t) \exp(-j2\pi f_c \tau_n(t)) \tilde{S}(t - \tau_n(t)) \right] \exp(j2\pi f_c t) \right\}$$

Então, a envoltória complexa da saída é dada por:

$$\tilde{y}(t) = \sum_n a_n(t) \exp(-j2\pi f_c \tau_n(t)) \tilde{s}(t - \tau_n(t)) = \sum_n \tilde{a}_n(\tau_n(t), t) \tilde{s}(t - \tau_n(t))$$

Resposta ao impulso passa-baixas equivalente complexa variante no tempo:

$$\tilde{c}(\tau_n(t), t) = \sum_n \tilde{a}_n(\tau_n(t), t) \delta(t - \tau_n(t))$$

Para o canal difuso a resposta é dada pela integral:

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{a}(\tau, t) \tilde{s}(t - \tau) d\tau$$

onde  $\tilde{a}(\tau, t)$  é a atenuação complexa da componente do sinal com um atraso  $\tau$  e instante  $t$ .

A resposta ao impulso variante no tempo passa-baixas fica então:

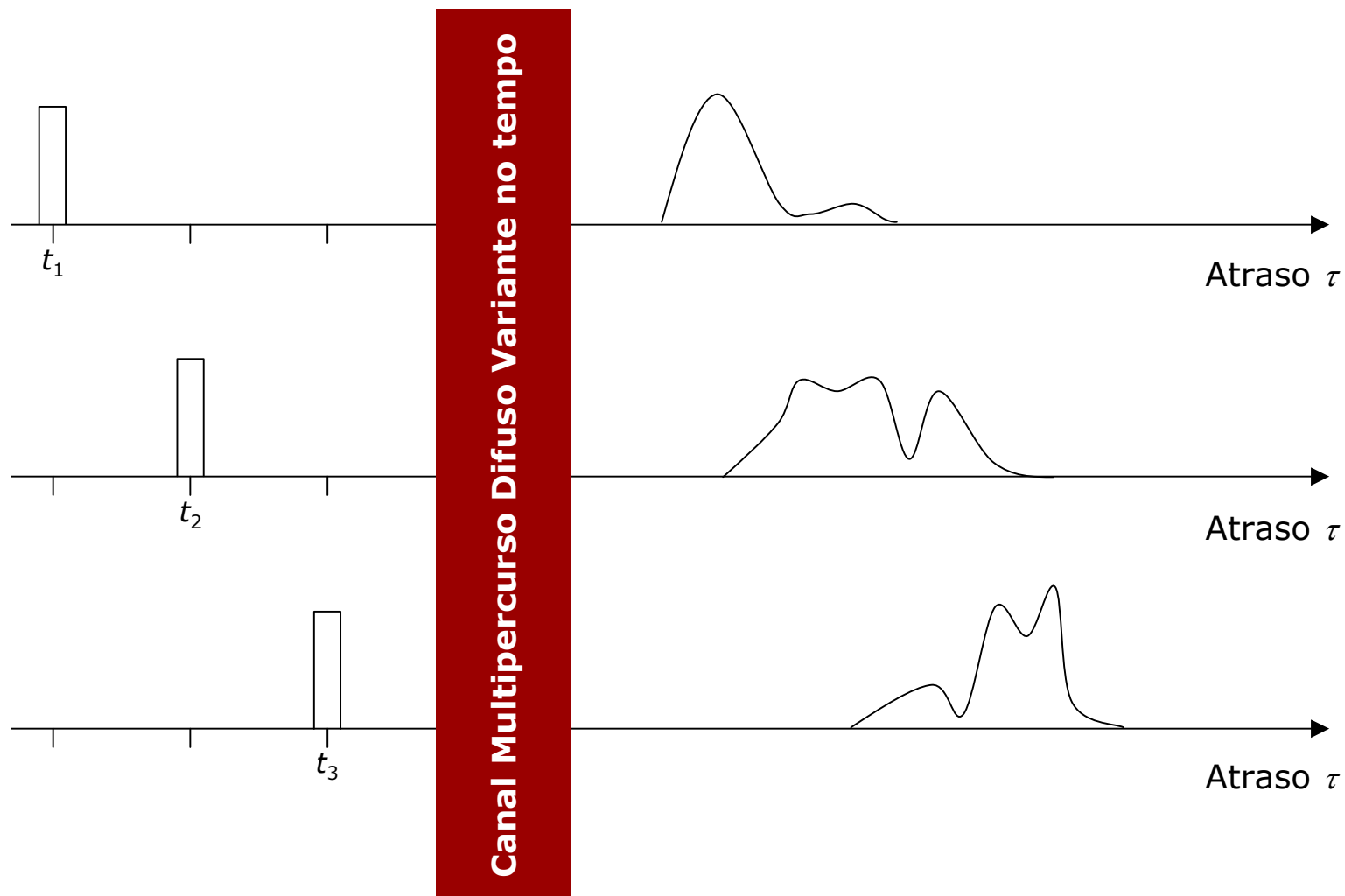
$$\tilde{c}(\tau, t) = \tilde{a}(\tau, t) \exp(-j2\pi f_c \tau)$$

## 2. Caracterização estatística de canais multipercursos:

Efeitos para os dois tipos de canal (difuso e discreto):

- a. espalhamento temporal (em  $\tau$ ) da duração do símbolo no sinal, o que é equivalente a filtragem e limitação em faixa.
- b. comportamento variante no tempo (em  $t$ ) do canal devido ao movimento do receptor ou de mudanças no meio tais como, movimento das folhagens ou dos refletores e espalhadores.

## Exemplo:



### 3. Caracterização estatística do Comportamento Variante no Tempo:

As flutuações do sinal recebido devido ao desvanecimento podem ser modeladas tomando  $\tilde{c}(\tau, t)$  como um processo aleatório em  $t$ .

Teorema Central do Limite:  $\tilde{c}(\tau, t) \Rightarrow$  processo gaussiano complexo.

As funções densidade de probabilidade da parte real e imaginária são gaussianas, para algum  $t$ .

Então, para cada  $\tau$ , o sinal recebido é composto de um grande número de componentes não resolvíveis.

Assim, os canais difuso e discreto são processos gaussianos complexos em  $t$ .

Se  $\tilde{c}(\tau, t)$  possuir média nula  $\Rightarrow$  envoltória  $R(\tau, t) = |\tilde{c}(\tau, t)|$  possui função densidade de probabilidade Rayleigh:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2}\right)$$

Se  $\tilde{c}(\tau, t)$  possuir média não nula  $\Rightarrow$  envoltória  $R(\tau, t) = |\tilde{c}(\tau, t)|$  possui função densidade de probabilidade de Rice:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} I_0\left[\frac{Ar}{\sigma^2}\right] \exp\left(\frac{-(r^2 - A^2)}{2\sigma^2}\right)$$

onde  $A$  é a média de  $\tilde{c}(\tau, t)$  e  $I_0$  é a função de Bessel de ordem zero e de primeira espécie.

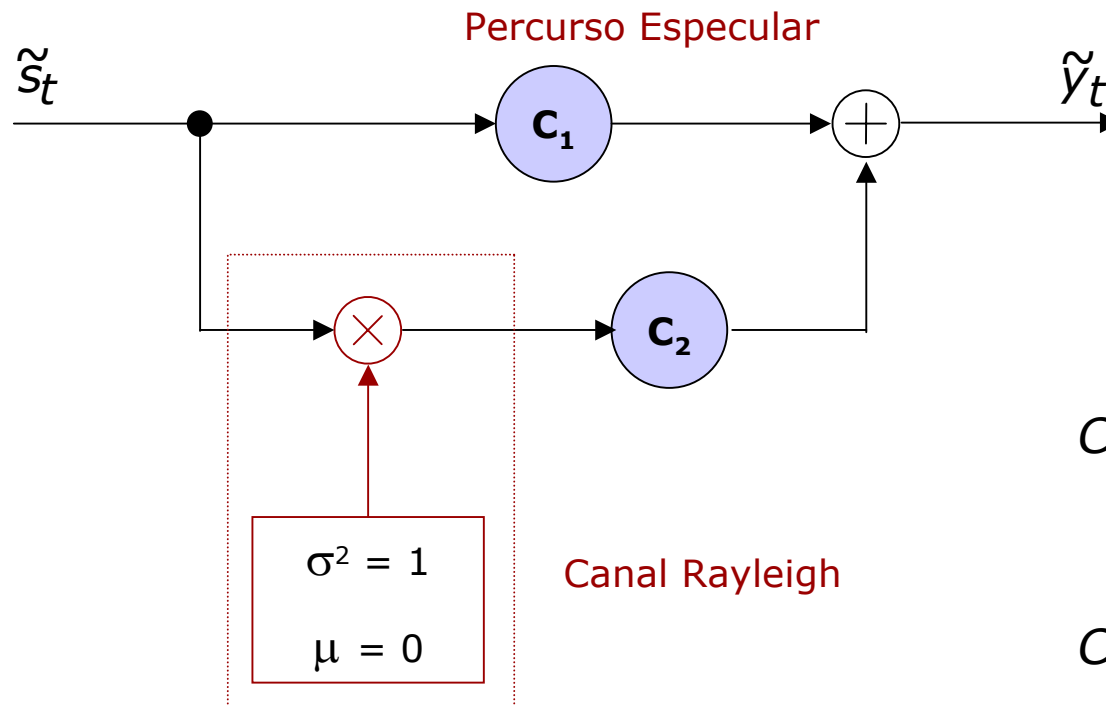
A razão  $K = A^2/\sigma^2$  é um indicador da potência relativa das componentes desvanecidas e não desvanecidas.



Se  $K \gg 1$  o canal tende a ser mais especular.

Se  $K \ll 1$  o canal tende a ser Rayleigh.

Modelo de simulação de um canal de Rice:



$$C_1 = \sqrt{\frac{K}{1+K}}$$

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{1+K}}$$

#### 4. Caracterização estatística do Modelo Estacionário no Sentido Amplo e com Espalhamento Não Correlacionado (WSSUS):

A natureza de variação no tempo do canal é modelada como um processo aleatório estacionário no sentido (WSS) amplo em  $t$ , com função de autocorrelação:

$$R_{\tilde{C}}(\tau_1, \tau_2, \Delta t) = E\left[\tilde{C}^*(\tau_1, t)\tilde{C}(\tau_2, t + \Delta t)\right]$$

Em muitos canais multipercurso, a atenuação e o deslocamento de fase associado a diferentes atrasos podem ser considerados incorrelatos (*uncorrelated scattering* – US), o que leva a:

$$R_{\tilde{C}}(\tau_1, \tau_2, \Delta t) = R_{\tilde{C}}(\tau_1, \Delta t)\delta(\tau_1 - \tau_2)$$

A função de autocorrelação para o modelo WSSUS de desvanecimento é então denotada por:

$$R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t) = E\left[\tilde{c}^*(\tau, t)\tilde{c}(\tau, t + \Delta t)\right]$$

O modelo WSSUS pode ser representado no tempo e na frequência. Usando a transformada de Fourier em  $\Delta t$ , obtemos a **função de espalhamento**:

$$S(\tau, \nu) = \mathfrak{F}_{\Delta t}[R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t) \exp[-j2\pi\nu\Delta t] d\Delta t$$

$\nu$  = frequência Doppler.

$S(\tau, \nu)$  = captura a **rapidez** com que o canal muda. Fornece uma medida da potência média de saída do canal em função do atraso e da frequência Doppler.

De  $S(\tau, \nu)$  pode-se obter algumas das mais importantes relações do canal. O perfil de atraso de potência ou perfil de intensidade de multipercurso é definido como:

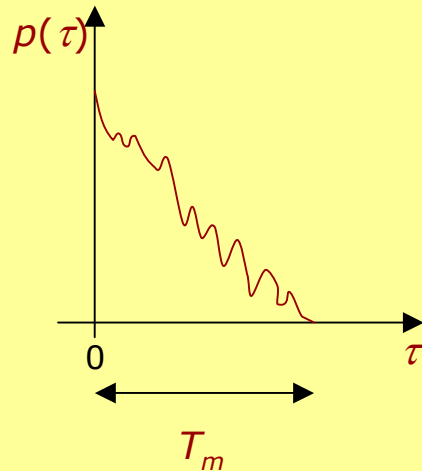
$$\rho(\tau) = R_{\tilde{c}}(\tau, 0) = E\left[|\tilde{c}(\tau, t)|^2\right]$$

que representa a potência média recebida como função do atraso  $\tau$ .

$$\rho(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau, \nu) d\nu$$

Espectro de Potência Doppler  $S(\nu)$  obtido de  $S(\tau, \nu)$ :

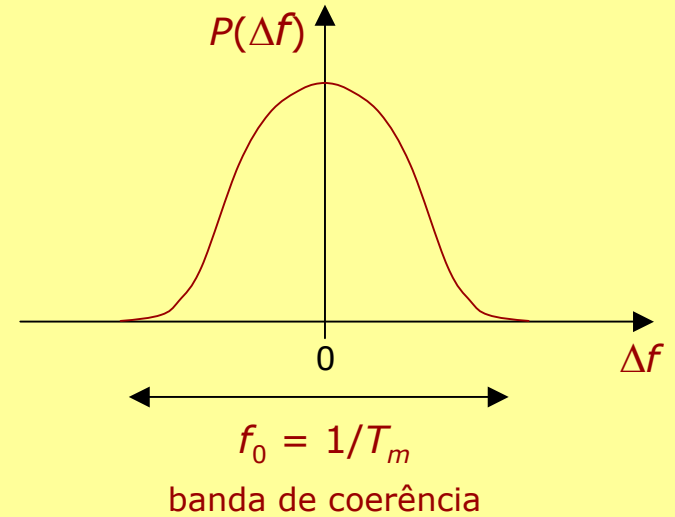
$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau, \nu) d\tau$$

**Perfil de Intensidade de Multipercurso:**

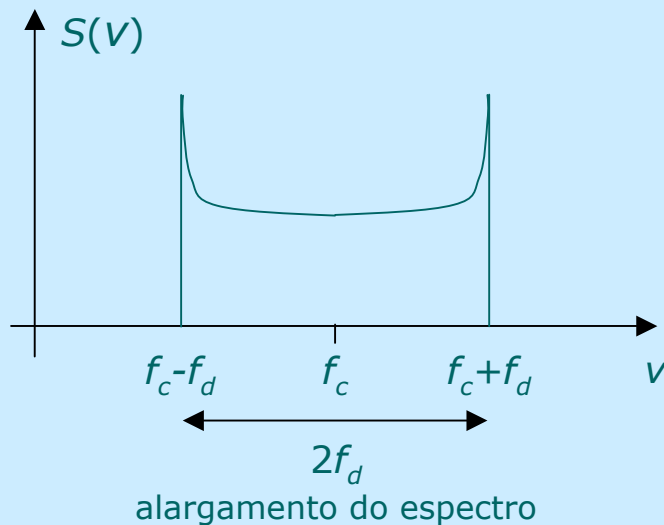
Atraso em excesso máximo

**Função de Correlação Espaçada em Freqüência:**

Fourier



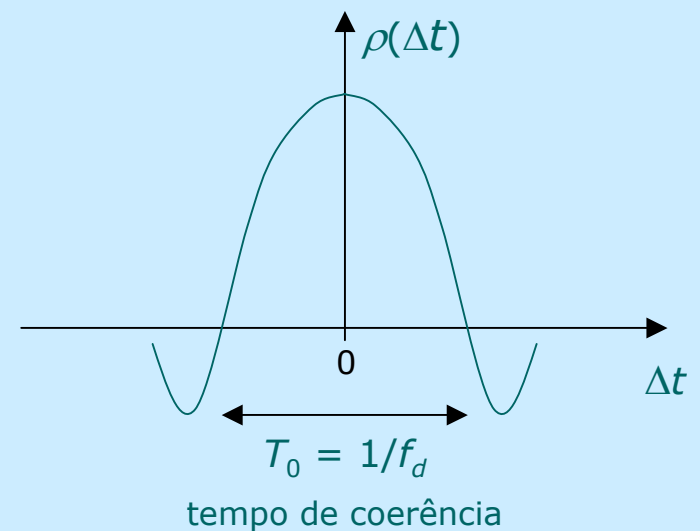
banda de coerência

**Espectro de Potência Doppler:**

alargamento do espectro

**Função de Correlação Espaçada no Tempo:**

Fourier



tempo de coerência

## Perfil de atraso de Potência:

O máximo atraso em excesso  $T_m$  ou o máximo espalhamento do atraso é o atraso entre a primeira e a última componente do sinal durante a qual a potência recebida cai dentro de um limiar fixado.

A relação entre  $T_m$  e a duração de um símbolo  $T_s$  pode ser vista em termos de dois critérios de degradação:

- canal com desvanecimento seletivo em frequência:  $T_m > T_s$ . Neste caso as componentes de multipercurso se estendem além da duração de um símbolo causando ISI.
- canal com desvanecimento plano ou não seletivo:  $T_m \ll T_s$ . Neste caso praticamente não há ISI mas ainda existirá distorção devido ao sinal multipercurso poder somar de forma destrutiva.

Em muitas aplicações o requisito para um canal ser não seletivo em frequência é  $\sigma_\tau < 0,1T_s$ , onde  $\sigma_\tau$  é o espalhamento de atraso rms.

No caso não seletivo em frequência, o canal pode ser modelado como um único raio e a relação entrada/saída pode ser expressa por uma multiplicação:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{c}(t)\tilde{s}(t)$$

Para o canal seletivo em frequência a relação entrada/saída é uma convolução em  $\tau$ :

$$\tilde{y}(t) = \tilde{c}(\tau, t) * \tilde{s}(t)$$

O atraso em excesso máximo  $T_m$  pode não ser um bom indicador de como um sistema se comportará em um dado canal pois alguns canais com mesmo  $T_m$  podem possuir perfis de potência de atraso muito diferentes.

**Melhor medida:** espalhamento de atraso rms:

$$\sigma_\tau = \sqrt{\overline{\tau^2} - \bar{\tau}^2}$$

onde

$$\overline{\tau^k} = \frac{\int \tau^k p(\tau) d\tau}{\int p(\tau) d\tau}$$

**Fato:** Sistema com receptores equalizados possuem mesmo desempenho, em termos de BER, para espalhamento de atraso rms idênticos.

Valores típicos de espalhamento de atraso rms:

| Tipo de enlace            | Distância do enlace | Espalhamento de atraso rms |
|---------------------------|---------------------|----------------------------|
| Espalhamento troposférico | 1.000 km            | milisegundos               |
| Móvel externo             | 1 km                | microsegundos              |
| Móvel interno             | 10 m                | nanosegundos               |

BER é mais sensível ao valor do espalhamento de atraso rms que ao espalhamento de atraso máximo  $\Rightarrow$  perfis mais simples em simulação = uniforme ou exponencial.

O perfil de atraso é geralmente normalizado  $\Rightarrow$  área = 1.



## Função de Correlação espaçada em freqüência $P(\Delta f)$ :

$$P(\Delta f) = \mathfrak{F}[\rho(\tau)]$$

Representa a correlação entre a resposta do canal a dois sinais de faixa estreita com freqüências  $f_1$  e  $f_2$ , como uma função da diferença  $\Delta f = f_2 - f_1$ .

Banda de coerência  $f_0 \approx 1/T_m$ : faixa na qual todas as magnitudes das componentes em freqüência estão correlacionadas.

A relação entre  $f_0$  e a banda  $B$  do sinal pode ser vista em termos de dois critérios de degradação:

- canal seletivo em freqüência:  $f_0 < B$ . Canal atua como um filtro sobre freqüências do sinal.
- canal não seletivo em freqüência:  $f_0 \gg B$ . Não introduz ISI, mas o sinal sofre desvanecimento.

Desvanecimento plano nem sempre é desejado  $\Rightarrow$  diversidade.

## Canal Variante no Tempo:

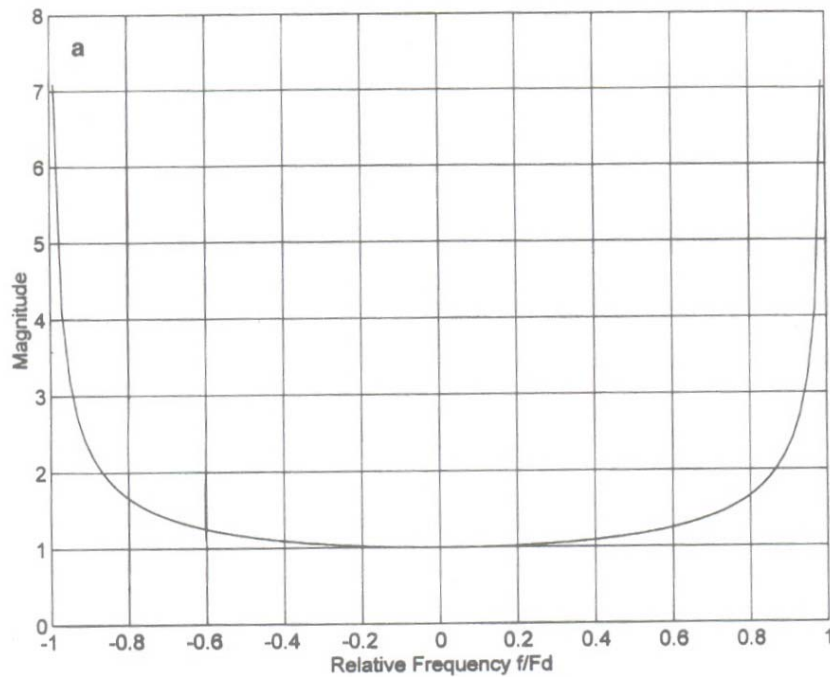
A variação temporal do canal é caracterizada pelo Espectro de Potência Doppler  $S(\nu)$ .

A exposição que se segue é baseada no modelo de espalhamento denso que possui o espectro de potência Doppler representado por

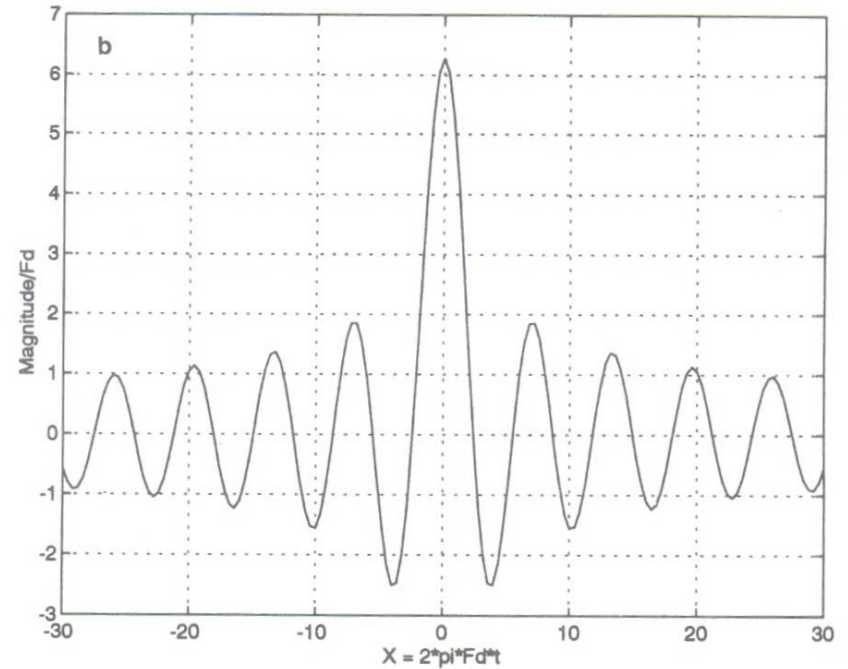
$$S(\nu) = \frac{1}{\pi f_d \sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{f_d}\right)^2}}, \quad |\nu| \leq f_d$$

## Modelo de Jakes:

### Espectro de Potência:



### Função de Autocorrelação:



Função correlação espaçada no tempo:  $\rho(\Delta t) = \mathfrak{F}^{-1}[S(\nu)]$ .

Para o modelo de espalhamento denso, temos

$$\rho(\Delta t) = \mathfrak{F}^{-1}(S(\nu)) = J_0(2\pi f_d \Delta t)$$

$\rho(\Delta t)$  representa a correlação entre a resposta do canal a dois sinais de faixa estreita (CW) enviados nos tempos  $t_1$  e  $t_2$ , onde  $\Delta t = t_2 - t_1$ .

O tempo de coerência  $T_0$  é a duração esperada na qual os dois sinais permanecem correlacionados.

Note que  $\rho(\Delta t) = 1$  para um canal invariante no tempo.

O comportamento variante no tempo é categorizado em:

- desvanecimento rápido:  $T_0 < T_s$ . Durante o desvanecimento rápido o sinal em banda base pode ser severamente distorcido.
- desvanecimento lento:  $T_0 > T_s$ . A degradação está na perda na SNR.

Espectro de Potência Doppler:

Máxima frequência Doppler:  $f_d = V/\lambda$ .

$V$  = velocidade de móvel

$\lambda$  = comprimento de onda do sinal.

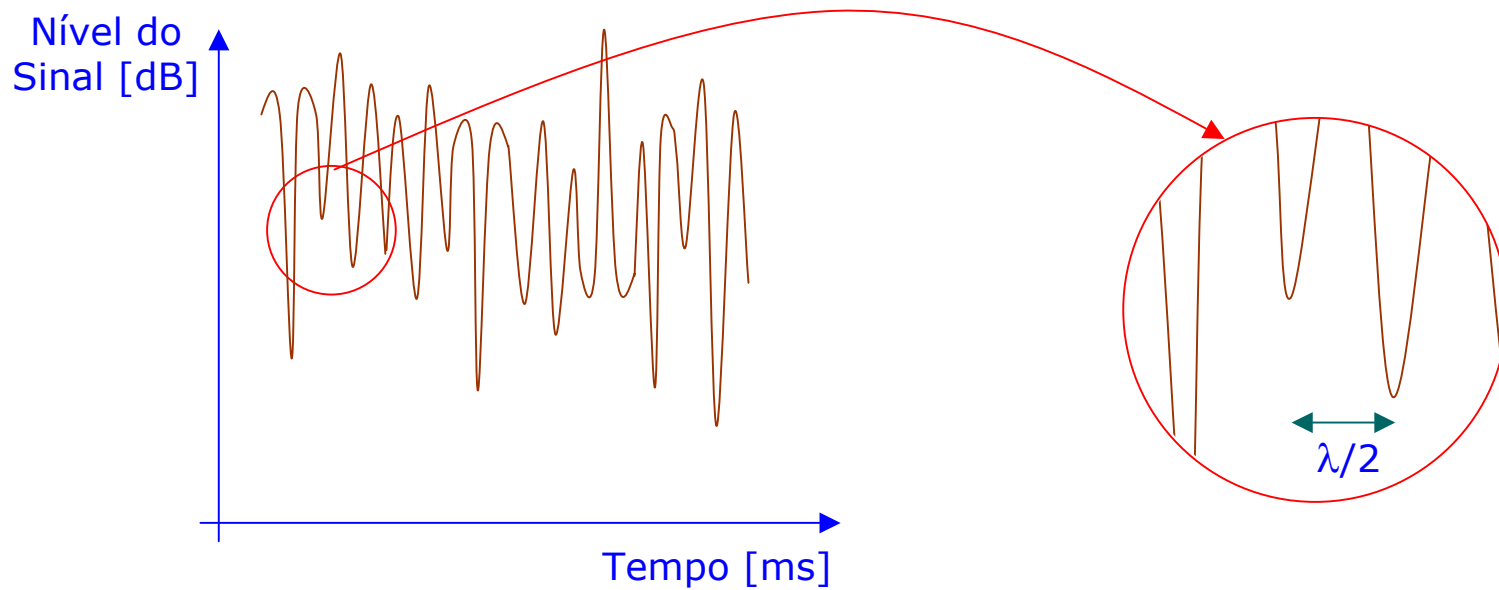
O espectro de potência Doppler de um canal dá informação sobre o alargamento do sinal de faixa estreita no domínio da frequência Doppler.

A largura do espectro de potência Doppler é denominada de alargamento espectral ou espalhamento Doppler, ou ainda largura de faixa do desvanecimento do canal.

O tempo de coerência e o espalhamento Doppler são relacionados pela relação  $T_0 \propto 1/f_d$ .

Regra prática para definir  $T_0$ :

$$T_0 \approx \frac{\lambda/2}{V} = \frac{0,5}{f_d}$$



O critério de degradação para desvanecimento rápido e lento em termos da largura de faixa do sinal  $B \approx 1/T_s$  e taxa de desvanecimento  $f_d \approx 1/T_0$  é dado por:

- ✓ canal com desvanecimento rápido:  $B < f_d$  (sinal severamente distorcido).
- ✓ canal com desvanecimento lento:  $B > f_d$  (não há distorção no sinal, só degradação da SNR).

Medidas em canais banda larga:

Perfil de intensidade de multipercurso é medido utilizando um sinal de RF de faixa larga no canal, onde o sinal modulado é uma seqüência PN de alta taxa.

Fazendo a correlação cruzada entre a saída do receptor com as versões atrasadas da seqüência PN e medindo o valor médio da saída do correlador obtém-se a potência versus o perfil de atraso.

Para medidas para aplicações em rádio móvel com uma estação base fixa e um usuário móvel, o perfil de atraso de potência é medido em incrementos de pequenas distâncias de frações de um comprimento de onda.

As medidas de correlação em função da posição (função de correlação espacial) pode ser convertida em uma função de correlação temporal, levando-se em conta que  $\Delta x = V\Delta t$ .

$\Delta x$  = movimento espacial incremental do móvel.

$V$  = velocidade do móvel.

Então, para qualquer velocidade do veículo, o espectro de potência Doppler pode ser obtido pela transformação da função de correlação temporal.



## 5. Modelos Estruturais para Canais com Desvanecimento Multipercurso:

### 5.1 Modelo de canal multipercurso difuso:

Sinal recebido consiste de um contínuo de componentes multipercurso.

Resposta ao impulso passa-baixas equivalente:

$$\tilde{c}(\tau, t) = a(\tau, t) \exp(-j2\pi f_c \tau)$$

Sinal recebido passa-baixas equivalente:

$$\tilde{y}(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t - \tau) \tilde{c}(\tau, t) d\tau$$

Canal possui banda  $B$  proporcional a taxa de símbolo  $r$ .

Então, pode-se representar a entrada passa-baixas do canal pelos valores de suas amostras na mínima taxa de amostragem  $B$ :

$$\tilde{s}(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t - nT) \text{sinc}[B(\tau - nT)]$$

$T = 1/B$ , período de amostragem.

Logo,

$$\tilde{y}(\tau, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t - nT) \text{sinc}[B(\tau - nT)] \right\} \tilde{c}(\tau, t) d\tau$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t - nT) \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[B(\tau - nT)] \tilde{c}(\tau, t) d\tau$$

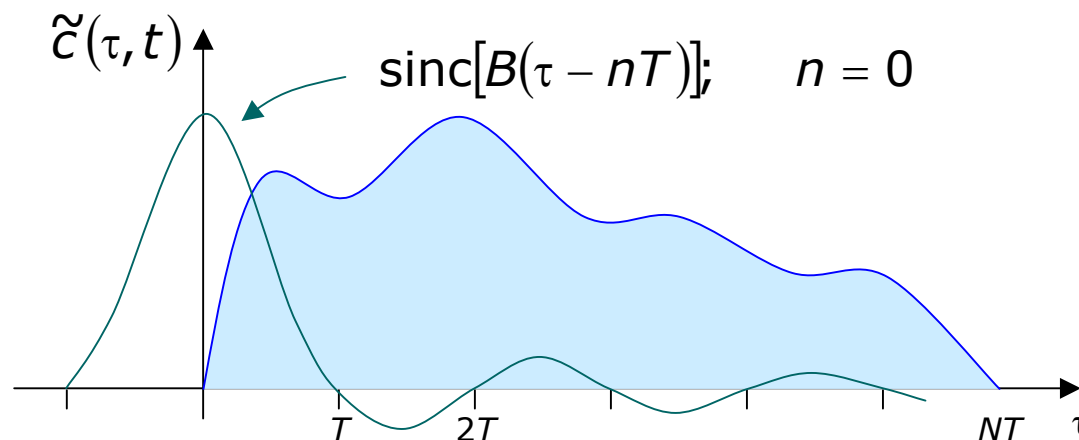
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{s}(t - nT) \tilde{g}_n(t)$$

## Observações:

1. A função  $\tilde{y}(\tau, t)$  pode ser gerada passando  $\tilde{s}(t)$  por uma linha de atraso com *taps*  $\tilde{g}_n(t)$  espaçados de  $T$  segundos.
2. As funções

$$\tilde{g}_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[B(\tau - nT)] \tilde{c}(\tau, t) d\tau$$

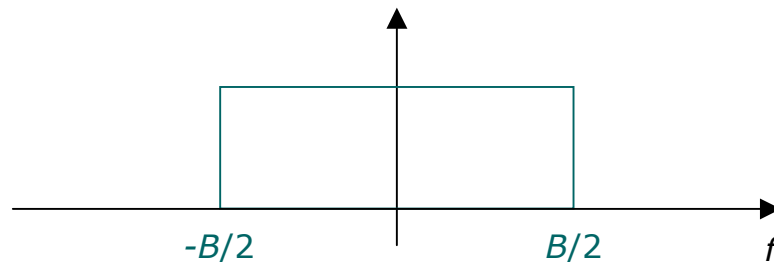
terão valores desprezíveis para  $n < 0$  e  $n > N$ , pois a resposta ao impulso possui comprimento  $NT$ .



Se assumirmos que a integral é dominada pelo lóbulo principal da função sinc, podemos obter a aproximação:

$$\tilde{y}(\tau, t) = \sum_{n=0}^N \tilde{s}(t - nT) \tilde{g}_n(t)$$

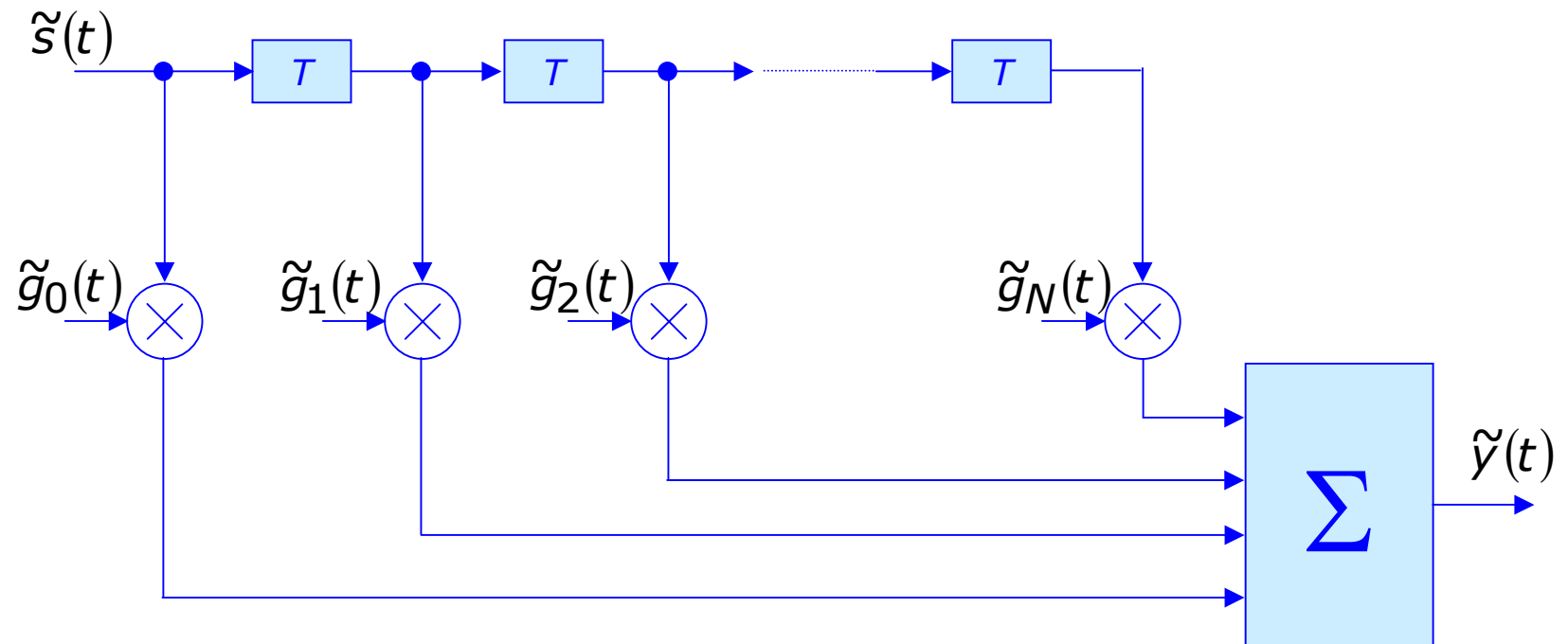
3. Como a função  $\text{sinc}(B\tau)$  é a resposta ao impulso de um filtro ideal de largura de faixa  $B/2$ , então  $\tilde{g}_n(t)$  pode ser visto como a versão filtrada da resposta ao impulso amostrada em múltiplos de  $T$ .



Assumindo que  $\tilde{g}_n(t)$  é bastante suave sobre  $T = 1/B$ , podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\tilde{g}_n(t) \approx T\tilde{c}(nT, t)$$

Obtemos assim o modelo de canal por linha de atraso:



$$T = 1/B.$$

## Modelos de ganhos de *taps* estatísticos:

Assumindo que  $\tilde{c}(\tau, t)$  é um processo aleatório gaussiano em  $t$ , então a expressão

$$\tilde{g}_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}[B(\tau - nT)] \tilde{c}(\tau, t) d\tau$$

é uma operação linear em  $\tilde{c}(\tau, t)$ .

Assim, os ganhos dos *taps*  $\tilde{g}_n(t)$  também são funções amostras de um processo complexo aleatório gaussiano com média zero.

Em geral, estas funções ganho são correlacionadas. Assim, para especificar o modelo é necessário calcular as funções de covariância cruzada:

$$R_{kl}(\Delta t) = E[\tilde{g}_k(\tau, t) \tilde{g}_l^*(\tau, t + \Delta t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[\tilde{c}(\tau, t) \tilde{c}^*(\mu, t + \Delta t)] \\ \times \text{sinc}[B(\tau - kT)] \text{sinc}[B(\mu - lT)] d\tau d\mu$$

Assumindo espalhamento descorrelacionado, a esperança do integrando se reduz a  $R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t)\delta(\tau - \mu)$ . Então,

$$R_{kl}(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t) \text{sinc}[B(\tau - kT)] \text{sinc}[B(\tau - lT)] d\tau$$

### a) Modelo de ganhos de *tap* descorrelacionados

A simulação é simplificada consideravelmente se for assumido que os ganhos de *tap* são descorrelacionados  $\Rightarrow R_{kl}(\Delta t) = 0$  para  $k \neq l$ .

Uma condição para que isso seja verdade:

$$R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t) = \text{cte} \quad \text{para todo } \tau$$

o que apresenta se as funções **sinc** forem ortogonais na expressão acima.

Isto é consistente com variação suave de  $\tilde{c}(\tau, t) \Rightarrow \tilde{g}_n(t) \approx T\tilde{c}(nT, t)$

Se  $R_{kl}(\tau, \Delta t)$  é próximo de zero para  $k \neq l$ . Então,

$$\tilde{y}(\tau, t) = \sum_{n=0}^N \tilde{s}(t - nT) \tilde{g}_n(t) \approx T \sum_{n=0}^N \tilde{s}(t - nT) \tilde{c}(nT, t)$$

mas, o perfil de intensidade de multipercurso é dado por

$$\rho(\tau) = R_{\tilde{c}}(\tau, 0) = E\left[|\tilde{c}(\tau, t)|^2\right]$$

Então no caso aproximado temos

$$E\left[|\tilde{g}_n(t)|^2\right] = T^2 E\left[|\tilde{c}(nT, t)|^2\right] = T^2 \rho(nT)$$

Podemos usar esta medida para calibrar os ganhos.

$\tilde{g}_n(t)$  é um processo gaussiano complexo de média zero. assim

$$\tilde{g}_n(t) = \tilde{g}_{n,r}(t) + j\tilde{g}_{n,i}(t)$$



Se a **variância** é  $\sigma^2$  para cada componente real e a imaginária de  $\tilde{g}_n(t)$  então

$$E\left[|\tilde{g}_n(t)|^2\right] = 2\sigma_n^2 = T^2 p(nT)$$

Do ponto de vista de simulação, assumir que os ganhos de *tap* são descorrelacionados faz com que cada ganho de *tap* possa ser gerado de forma independente utilizando um gerador de números aleatórios gaussiano com a variância acima.

### b) Modelos de ganhos de *taps* correlacionados

Sem a aproximação feita no item anterior, as funções de ganho de *tap* serão correlacionadas como já mostrado em

$$R_{kl}(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\mathcal{C}}(\tau, \Delta t) \text{sinc}[B(\tau - kT)] \text{sinc}[B(\tau - lT)] d\tau$$

O canal é então caracterizado pela matriz de covariância:

$$\mathbf{R}(\Delta t) = \begin{bmatrix} R_{00}(\Delta t) & R_{01}(\Delta t) & \cdots & R_{0N}(\Delta t) \\ R_{10}(\Delta t) & R_{11}(\Delta t) & \cdots & R_{1N}(\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N0}(\Delta t) & R_{N1}(\Delta t) & \cdots & R_{NN}(\Delta t) \end{bmatrix}$$

A potência média do *tap*  $m = 2\sigma_m^2 = R_{mm}(0)$

Obter um conjunto de processos aleatórios correlacionados com uma matriz de covariância arbitrária dada acima é  **muito difícil!**

**Solução:** Função de espalhamento simplificada

A densidade espectral de potência Doppler de cada processo  $\tilde{c}(\tau, t)$  é por definição a função de espalhamento  $S(\tau, \nu)$  calculada para um  $\tau$ .

$$S(\tau, \nu) = \mathfrak{F}_{\Delta t} [R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t) \exp[-j2\pi\nu\Delta t] d\Delta t$$

$S(\tau, \nu)$  é difícil de medir, então assumimos que o formato de  $S(\tau, \nu)$  é independente de  $\tau$ , o que implica em

$$S(\tau, \nu) = \Psi(\tau)S(\nu)$$

Então,

$$p(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau, \nu) d\nu = \Psi(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) d\nu = a\Psi(\tau)$$

Uma consideração freqüente é a de que  $p(\tau)$  e  $S(\nu)$  são normalizadas para ter uma potência total igual a 1. Então,

$$S(\tau, \nu) = p(\tau)S(\nu)$$

ou seja, o perfil de potência de atraso  $p(\tau)$  e a densidade espectral de potência Doppler  $S(\nu)$  são separáveis. Aplicando a transformada de Fourier inversa em  $\nu$ , obtemos

$$R_{\zeta}(\tau, \Delta t) = p(\tau)\rho(\Delta t)$$

Onde a autocorrelação possui a mesma função de correlação espaçada no tempo para cada  $\tau$ .

Assim, temos que

$$R_{kl}(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t) \text{sinc}[B(\tau - kT)] \text{sinc}[B(\tau - lT)] d\tau$$

toma a forma

$$R_{mn}(\Delta t) = \rho(\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) \text{sinc}[B(\tau - mT)] \text{sinc}[B(\tau - nT)] d\tau$$

Assumindo que o espaçamento dos taps  $T = 1/B$ , temos

$$R_{mn}(\Delta t) = \rho(\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\tau) \text{sinc}(B\tau - m) \text{sinc}(B\tau - n) d\tau$$

Assim, a matriz covariância pode ser escrita como

$$\mathbf{R}(\Delta t) = \mathbf{R}_0 \rho(\Delta t)$$

$p(\tau)$  é real  $\Rightarrow R_{mn}(\Delta t)$  é real  $\Rightarrow \mathbf{R}_0$  é real  $\Rightarrow R_{mn} = R_{nm}$ .

Processo para gerar os ganhos de *taps*:

Obtenção de uma transformação linear  $\mathbf{L}$  (matriz  $N+1 \times N+1$ ) tal que:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{L} \times \mathbf{Z}$$

onde

$\tilde{\mathbf{g}} = [\tilde{g}_0(t), \tilde{g}_1(t), \tilde{g}_2(t), \dots, \tilde{g}_N(t)]^T$  vetor coluna dos processos de ganho de taps.

$\mathbf{Z} = [Z_0(t), Z_1(t), Z_2(t), \dots, Z_N(t)]^T$  vetor coluna dos processos gaussianos complexos independentes.

$$E[Z_i(t_1)Z_j(t_2)] = 0 \quad \text{para } i \neq j \text{ e qualquer } t_1 \text{ e } t_2$$

A covariância de  $Z_n(t)$  é

$$E\left[Z_n(t_1)Z_n^*(t_2)\right] = \Psi(\Delta t)$$

onde  $\Delta t = t_2 - t_1$  é o mesmo para todo  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Assim,

$$E\left[\tilde{\mathbf{g}}(t_1)\tilde{\mathbf{g}}^H(t_2)\right] = \mathbf{L}\Psi(\Delta t)\mathbf{L}^T = \Psi(\Delta t)\mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

onde  $(.)^H$  representa complexo conjugado transposto. Para obter as condições adequadas de  $\mathbf{L}$ , fazemos:

$$\mathbf{R}(\Delta t) = \mathbf{R}_0\rho(\Delta t) = \Psi(\Delta t)\mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

que leva a:  $\rho(\Delta t) = \Psi(\Delta t)$

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

Para obter a igualdade  $\rho(\Delta t) = \Psi(\Delta t)$ , temos que formatar a densidade espectral de potência de cada processo  $Z_n(t)$  para ter espectro Doppler  $S(\nu)$  comum, o que é feito gerando primeiro um processo aleatório branco  $W_n(t)$  e passando-o por um filtro com função de transferência

$$|H(f)|^2 = S(\nu)$$

Para satisfazer  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ ,  $\mathbf{R}_0$  tem que ser real e simétrico (**verdadeiro!**)

Além disso, se  $\mathbf{R}_0$  for definida positiva (**verdadeiro**), então a fatoração de  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$  pode ser realizada, sendo  $\mathbf{L}$  dada por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{00} & l_{01} & \cdots & l_{0N} \\ 0 & l_{11} & \cdots & l_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{NN} \end{bmatrix}$$

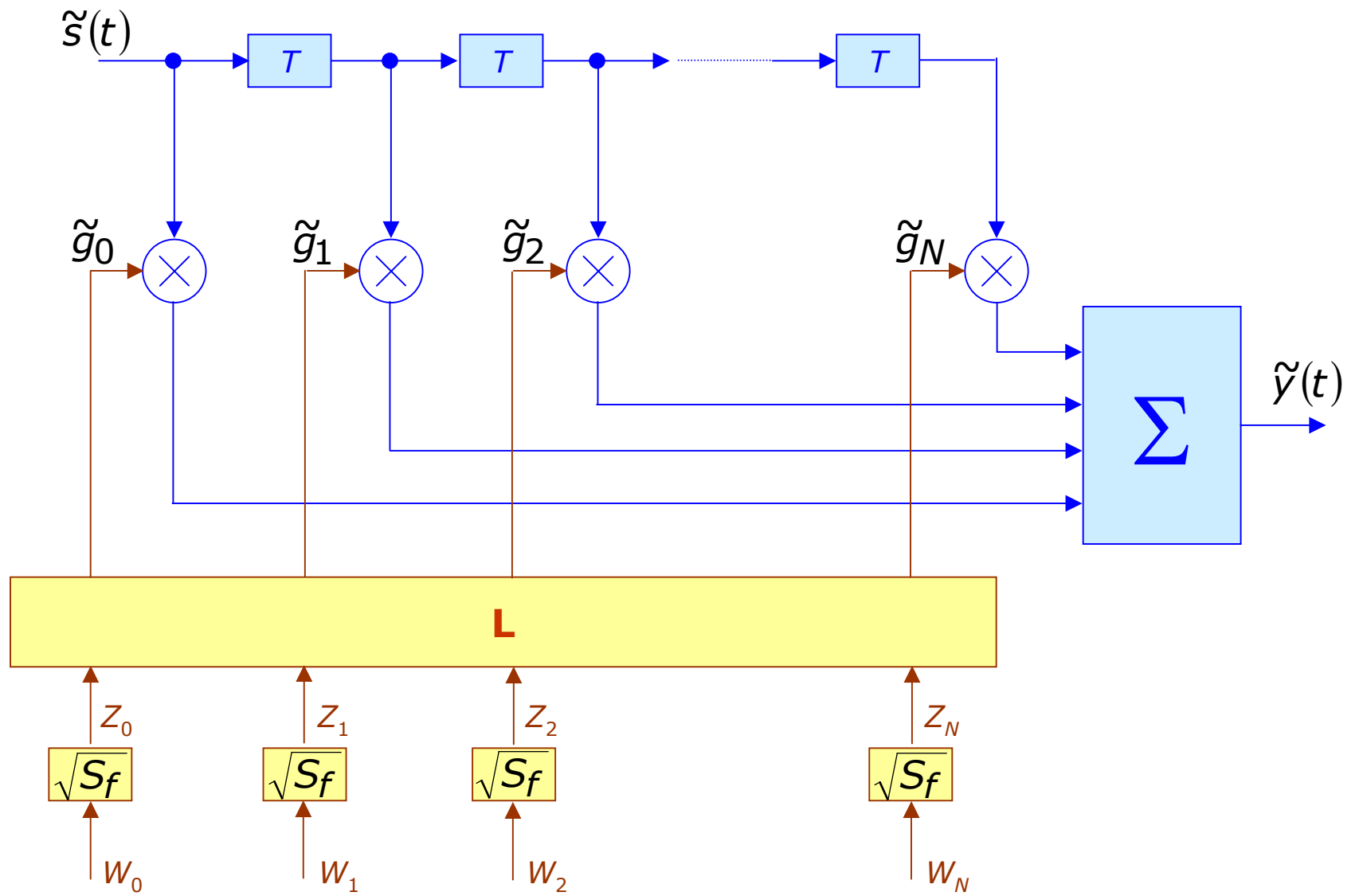
A decomposição de  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$  em matrizes triangulares superior e inferior é conhecida como **fatoração de Cholesky**.

Iniciamos com  $N+1$  processos gaussianos brancos distribuídos identicamente e independentemente (i.i.d.).

Cada processo é então passado por um filtro separado, cuja saída possui uma densidade espectral de potência igual ao espectro Doppler  $S(\cdot)$ .

As saídas dos filtros  $Z_n(t)$  são transformadas pela matriz  $\mathbf{L}$  de forma a produzir os  $\tilde{g}_n(t)$ .





### c) Espectro Doppler e perfil de potência de atraso filtrado

Instrumentos de medida geralmente possuem um filtro de banda larga que podem influenciar nas medições que se deseja realizar sobre um canal ou sobre o sinal transmitido.

Suponha que tenhamos medido o perfil de atraso de potência  $\rho(\tau)$  (ou, mais geral, a função de correlação do canal  $R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t)$ ).

Suponha também que queremos simular o efeito deste canal sobre um sinal de largura de faixa  $B$ .

Assumimos que o filtro do instrumento de medida possui resposta ao impulso passa-baixa complexa  $\tilde{h}(t)$  e largura de faixa  $B_M > B$ .

Então, a resposta ao impulso passa-baixa complexa do canal é dada por

$$\tilde{c}_h(\tau, t) = \tilde{c}_M(\tau, t) * \tilde{h}(t)$$

onde  $\tilde{c}_M(\tau, t)$  é a resposta do canal medido.

Função de correlação do canal correspondente:

$$R_{\tilde{c}_h}(\tau, \Delta t) = E[\tilde{c}_h(\tau, t)\tilde{c}_h(\tau, t + \Delta t)]$$

Calculando a função de correlação do canal filtrado em termos da função de correlação do canal sem filtragem obtemos:

$$\begin{aligned} R_{\tilde{c}_h}(\tau, \Delta t) &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}_M(s, t) * \tilde{h}(\tau - s) ds \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}_M^*(u, t + \Delta t) * \tilde{h}^*(\tau - u) du\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[\tilde{c}_M(s, t)\tilde{c}_M^*(u, t + \Delta t)] \tilde{h}(\tau - s)\tilde{h}^*(\tau - u) ds du \end{aligned}$$

Seja  $B_M \rightarrow \infty$ , ou seja, o instrumento de medida não filtra nada, então

$$\tilde{c}_M(\tau, t) \rightarrow \tilde{c}(\tau, t)$$

Podemos invocar a suposição de espalhamento descorrelacionado, tal que:

$$E[\tilde{c}(s, t)\tilde{c}^*(u, t + \Delta t)] \neq 0 \quad \text{somente se } s = u.$$

Então,

$$R_{\tilde{C}_h}(\tau, \Delta t) = R_{\tilde{C}}(\tau, \Delta t) * |\tilde{h}(\tau)|^2$$

Se  $\Delta t = 0$ , o perfil de potência de atraso é dado por

$$p_h(\tau) = p(\tau) * |\tilde{h}(\tau)|^2$$

No domínio da frequência, temos

$$P_h(\Delta f) = P(\Delta f) (\tilde{H}(f) * \tilde{H}(-f))$$

Portanto, a potência média do  $m$ -ésimo percurso com o valor correspondente do perfil de potência de atraso filtrada fica

$$p_h(\tau_m) = R_{mm}(0) = 2\sigma_m^2$$

O número de *taps* pode ser obtido do gráfico de  $p_h(\tau)$ .

Voltando para a questão do espectro Doppler filtrado, então a função de espalhamento filtrada é dada por

$$S_h(\tau, \nu) = \mathfrak{F}_{\Delta t} [R_{\tilde{c}_h}(\tau, \Delta t)]$$

que resulta em

$$S_h(\tau, \nu) = S(\tau, \nu) * |\tilde{h}(\tau)|^2$$

Então, para um dado  $\tau$ , o espectro Doppler filtrado possui formato diferente do espectro Doppler. Usando a simplificação  $S(\tau, \nu) = p(\tau)S(\nu)$  na expressão acima obtemos:

$$S_h(\tau, \nu) = S(\nu)p(\tau) * |\tilde{h}(\tau)|^2 = S(\nu)p_h(\tau)$$

Neste caso o formato do espectro Doppler permanece o mesmo para todo  $\tau$ .

Na prática  $B_M$  não é infinita, mas se for ampla o bastante a consideração de espalhamentos descorrelacionados continua válida. Caso contrário, não se pode obter  $R_{\tilde{c}_h}(\tau, \Delta t) = R_{\tilde{c}}(\tau, \Delta t) * |\tilde{h}(\tau)|^2$  diretamente.

Entretanto, como o medidor filtra  $\tilde{c}_M(\tau, t)$  com sua resposta  $h_M(t)$ , temos:

$$\tilde{c}_M(\tau, t) = \tilde{c}(\tau, t) * \tilde{h}_M(\tau)$$

Assim, se desejarmos filtrar esta medida filtrada, temos

$$\tilde{c}_M(\tau, t) = \tilde{c}(\tau, t) * \tilde{h}_M(\tau) * \tilde{h}(\tau)$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} p_h(\tau) &= p(\tau) * |\tilde{h}_M(\tau) * \tilde{h}(\tau)|^2 \\ &= p(\tau) * |\tilde{h}_M(\tau)|^2 * |\tilde{h}(\tau)|^2 = p_M(\tau) * |\tilde{h}(\tau)|^2 \end{aligned}$$

## Exemplo: Modelo Multipercurso Difuso

$$p(\tau) = \frac{1}{T} \exp\left(-0,4 \frac{\tau}{T}\right) \quad 0 \leq \tau \leq 4$$

Espaçamento dos taps  $T = 1$ .

- a. As magnitudes dos processos de ganho de *tap* para a aproximação descorrelacionada são

$$|\tilde{g}_n|^2 = T^2 p(nT)$$

$$|\tilde{g}_0| = 1,0 \quad |\tilde{g}_1| = 0,82 \quad |\tilde{g}_2| = 0,67 \quad |\tilde{g}_3| = 0,55 \quad |\tilde{g}_4| = 0,37$$

- b. As magnitudes dos ganhos de *tap* são calculadas pela matriz de covariância  $\mathbf{R}_0$ :

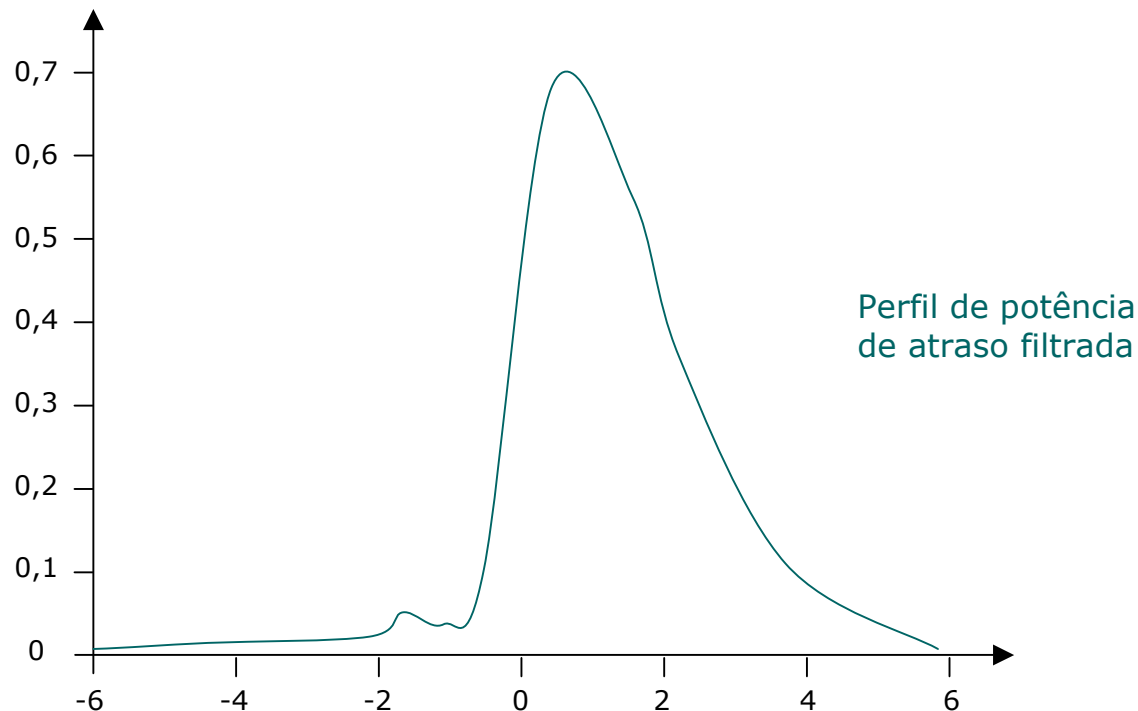
$$R_{mn}(\Delta t) = \rho(\Delta t) \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau) \text{sinc}(B\tau - m) \text{sinc}(B\tau - n) d\tau$$

Resultando em

$$R_{mn}(0) = \sum_{k=0}^K p(k\Delta\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{k\Delta\tau}{T} - m\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{k\Delta\tau}{T} - n\right)$$

$K = 10 - 20$  amostras por símbolo, para amostrar  $p(\tau)$ .

$N =$  número de *taps* (*rank* da matriz de covariância), determinado pelo  $p_h(\tau)$ .





Calculando  $R_{mm}(0)$  para  $N = 8$ , obtemos a matriz de covariância  $\mathbf{R}_0$ :

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 0.0105 & -0.0165 & 0.0520 & 0.0136 & -0.0172 & 0.0158 & -0.0161 & 0.0092 \\ -0.0165 & 0.0264 & -0.0875 & -0.0287 & 0.0285 & -0.0239 & 0.0226 & -0.0135 \\ 0.0520 & -0.0875 & 0.4281 & 0.1448 & -0.0865 & 0.0610 & -0.0501 & 0.0337 \\ 0.0136 & -0.0287 & 0.1448 & 0.6215 & 0.0281 & -0.0190 & 0.0185 & -0.0059 \\ -0.0172 & 0.0285 & -0.0865 & 0.0281 & 0.4342 & 0.0099 & -0.0137 & -0.0015 \\ 0.0158 & -0.0239 & 0.0610 & -0.0190 & 0.0099 & 0.2938 & 0.0174 & 0.0073 \\ -0.0161 & 0.0226 & -0.0501 & 0.0185 & -0.0137 & 0.0174 & 0.1194 & -0.0320 \\ 0.0092 & -0.0135 & 0.0337 & -0.0059 & -0.0015 & 0.0073 & -0.0320 & 0.0131 \end{bmatrix}$$

A matriz  $\mathbf{L}$  é obtida usando a fatoração de Cholesky da matriz  $\mathbf{R}_0$ :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.1024 & -0.1615 & 0.5077 & 0.1329 & -0.1683 & 0.1541 & -0.1567 & 0.0897 \\ 0 & 0.0186 & -0.2931 & -0.3885 & 0.0707 & 0.0550 & -0.1474 & 0.0545 \\ 0 & 0 & 0.2907 & -0.1255 & 0.0677 & -0.0038 & -0.0472 & 0.0141 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6612 & 0.1308 & -0.0281 & -0.0361 & 0.0078 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6158 & 0.0583 & -0.0352 & 0.0126 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5127 & 0.0985 & -0.0195 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2422 & -0.0271 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0224 \end{bmatrix}$$

Os ganhos de taps correlacionados  $\tilde{\mathbf{g}}_k$  são obtidos de processos gaussianos independentes  $\mathbf{Z}_k$ , usando a matriz  $\mathbf{L}$  acima:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{L} \times \mathbf{Z}$$

## Amostragem:

Nas simulações, os valores da entrada contínua  $\tilde{s}(t)$  e da saída  $\tilde{y}(t)$  são amostrados.

A taxa de amostragem geralmente é de 8 a 16 vezes a largura de faixa, onde a largura de faixa inclui o efeito do espalhamento devido a natureza variante no tempo do sistema.

Então, a largura de faixa da saída da linha de atraso é  $B_y = B_s + f_D$ .

$B_s$  = largura de faixa da entrada.

$f_D$  = máxima frequência Doppler.

Entretanto,  $B_s \gg f_D \Rightarrow$  aumento mínimo na taxa de amostragem!

## 5.2 Modelo de Canal Multipercurso Discreto

Composto de um conjunto de componentes resolvíveis discretas originárias de reflexões ou espalhamentos.

Modelo: ganhos de *taps* variáveis, atrasos variáveis e número de *taps* variáveis.

Resposta ao impulso passa-baixas equivalente:

$$\tilde{c}(\tau, t) = \sum_{k=1}^{K(t)} \tilde{a}_k(\tau_k(t), t) \delta(\tau - \tau_k(t))$$

Saída passa-baixas equivalente:

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^{K(t)} \tilde{a}_k(\tau_k(t), t) \tilde{s}(\tau - \tau_k(t))$$

Canais de referências usados para estudo de sistemas:

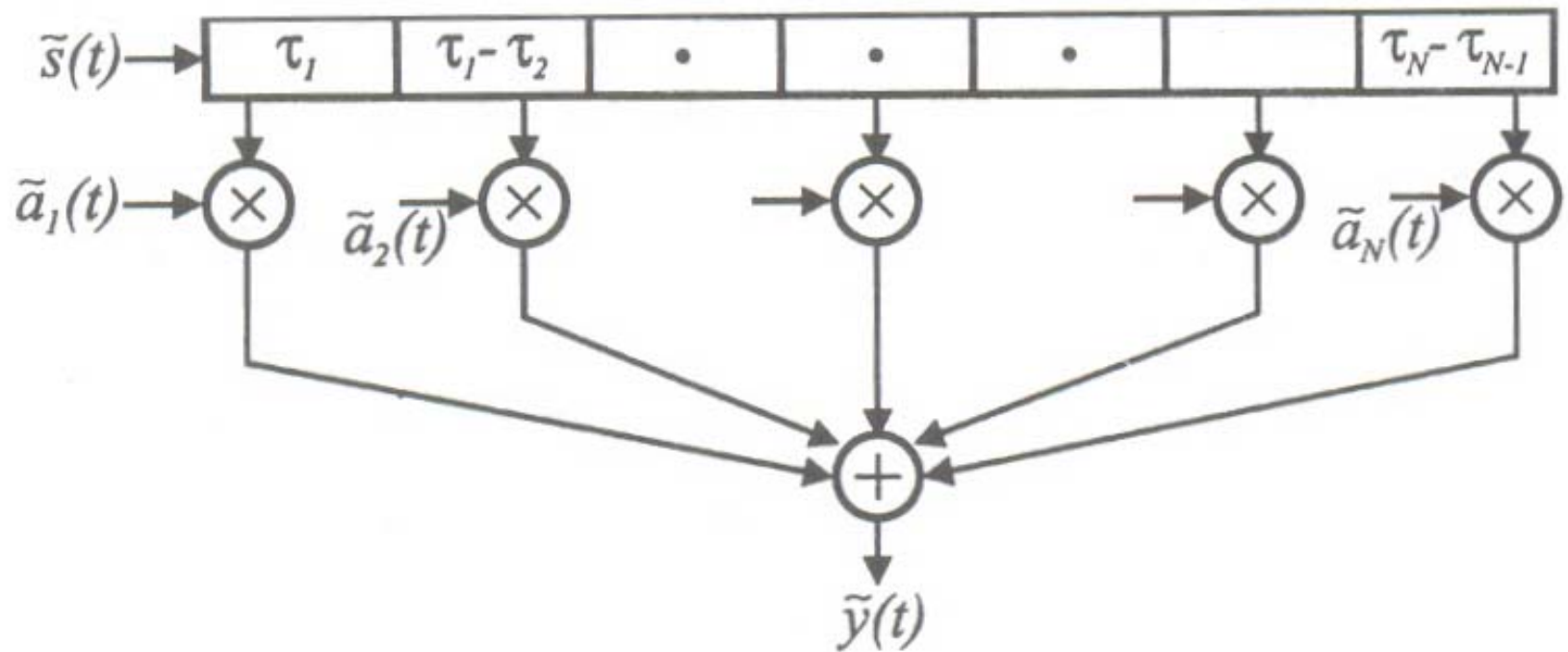
- número de componentes discretos é constante,
- valores dos atrasos variam lentamente, portanto, constantes.

Então,

$$\tilde{c}(\tau, t) = \sum_{k=1}^K \tilde{a}_k(t) \delta(\tau - \tau_k)$$

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^K \tilde{a}_k(t) \tilde{s}(\tau - \tau_k)$$

O canal discreto simplificado pode então ser modelado como a seguinte linha de atraso:



## Modelos de Canal Discretos filtrados para Simulação:

A simulação do modelo discreto é praticamente direta usando a expressão:

$$R_{kl}(\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\tilde{C}}(\tau, \Delta t) \text{sinc}[B(\tau - kT)] \text{sinc}[B(\tau - lT)] d\tau$$

Entretanto, algumas vezes este modelo pode resultar em uma simulação ineficiente.

**Problema:** os atrasos diferenciais podem ser pequenos quando comparados com o tempo de amostragem da simulação  $T_a$ , ou eles não são múltiplos inteiros de  $T_a$ , ou podem ser muito numerosos.

Neste caso é conveniente limitar em faixa o canal de modo a obter uma linha de atraso *tapped* espaçada uniformemente.

Filtro limitante de faixa = filtro retangular ideal de banda igual a do sinal.

Aplicando o método de limitação de banda do caso do canal difuso, obtemos os ganhos de *tap*:

$$\tilde{g}_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{c}(\tau, t) \text{sinc}[B(\tau - nT)] d\tau$$

Substituindo  $\tilde{c}(\tau, t) = \sum_{k=1}^K \tilde{a}_k(t) \delta(\tau - \tau_k)$  na expressão acima, temos:

$$\tilde{g}_n(t) = \sum_{k=1}^K \tilde{a}(t) \text{sinc}[B(\tau_k - nT)] = \sum_{k=1}^K \tilde{a}(t) \alpha(k, n) \quad -N \leq n \leq N$$

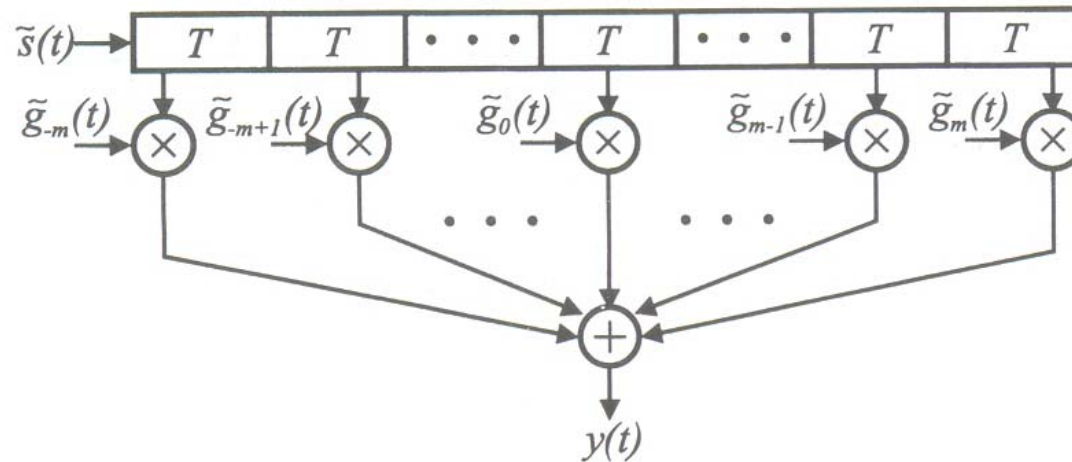
onde  $T = 1/B$  e  $\alpha(k, n) = \text{sinc}\left[B\left(\frac{\tau_k}{T} - n\right)\right]$

$\alpha$  decresce rapidamente  $\Rightarrow$  número pequeno de *taps*.

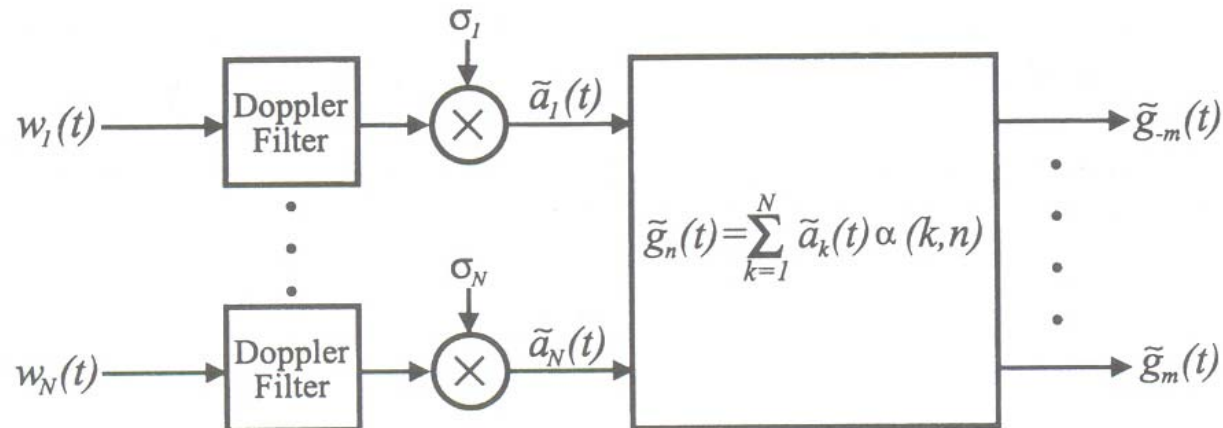
O número de *taps* é determinado pelo máximo espalhamento de potência de atraso  $T_m$  do perfil de potência de atraso limitada em faixa.



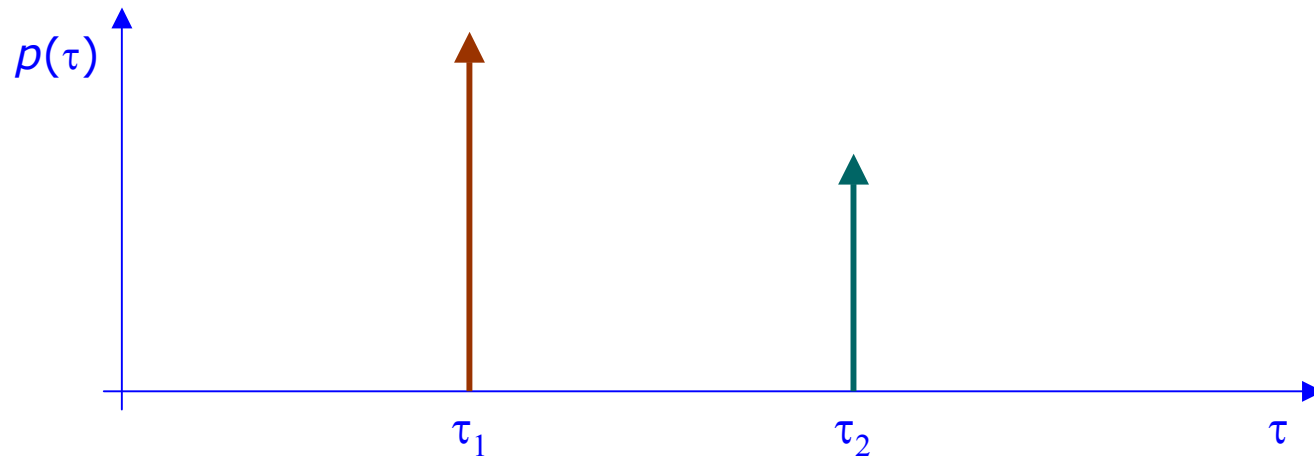
Modelo para o canal multipercurso discreto limitado em faixa:



Geração dos ganhos dos *taps*:



Exemplo: Modelo com dois percursos discreto com desvanecimento Rayleigh:



Desempenho é calculado na forma paramétrica variando a razão do espalhamento de atraso normalizado  $\Delta\tau = (\tau_2 - \tau_1)/T$ , onde  $T = 1/B$  é a duração de um símbolo, e a razão das potências relativas nos dois percursos  $(\sigma_1/\sigma_2)^2$ .

Se  $\Delta\tau \ll 1 \Rightarrow$  dois percursos são combinados (canal não seletivo).

Se  $\Delta\tau > 0,1 \Rightarrow$  haverá interferência entre símbolos (canal seletivo).

Calculo das funções de ganho de *tap* para  $\Delta\tau = 0,75$ :

Obtido pela filtragem de dois processos gaussianos brancos descorrelacionados, para em seguida transformá-los em processos de ganhos de *tap* por:

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_{-3}(t) \\ \tilde{g}_{-2}(t) \\ \tilde{g}_{-1}(t) \\ \tilde{g}_0(t) \\ \tilde{g}_1(t) \\ \tilde{g}_2(t) \\ \tilde{g}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sinc}(0,0 + 3) & \text{sinc}(0,75 + 3) \\ \text{sinc}(0,0 + 2) & \text{sinc}(0,75 + 2) \\ \text{sinc}(0,0 + 1) & \text{sinc}(0,75 + 1) \\ \text{sinc}(0,0 + 0) & \text{sinc}(0,75 + 0) \\ \text{sinc}(0,0 - 1) & \text{sinc}(0,75 - 1) \\ \text{sinc}(0,0 - 2) & \text{sinc}(0,75 - 2) \\ \text{sinc}(0,0 - 3) & \text{sinc}(0,75 - 3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_1(t) \\ \tilde{a}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 & -0,060 \\ 0,0 & 0,082 \\ 0,0 & -0,128 \\ 1,0 & 0,300 \\ 0,0 & -0,900 \\ 0,0 & -0,180 \\ 0,0 & 0,100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_1(t) \\ \tilde{a}_2(t) \end{bmatrix}$$

Note que estes coeficientes são desprezíveis para ganhos de *tap* de ordem superior, então eles podem ser ignorados e o modelo de linha de atrasos pode ser truncado em 7 *taps*.

### 5.3 Geração de Processos de Ganhos de *Tap*

A implementação dos modelos apresentados necessitam de dois passos:

1. Geração de um conjunto de processos gaussianos brancos (discretos).
2. Formatação da densidade espectral de potência desses processos para que eles tenham o formato do espectro Doppler para cada um dos *taps*.

Assim, o modelo simplificado pode ser utilizado para produzir o espectro Doppler.

O modelo de espectro Doppler adotado na simplificação é tipicamente uma função par  $\Rightarrow$  só é necessário um filtro real para formatar o espectro.

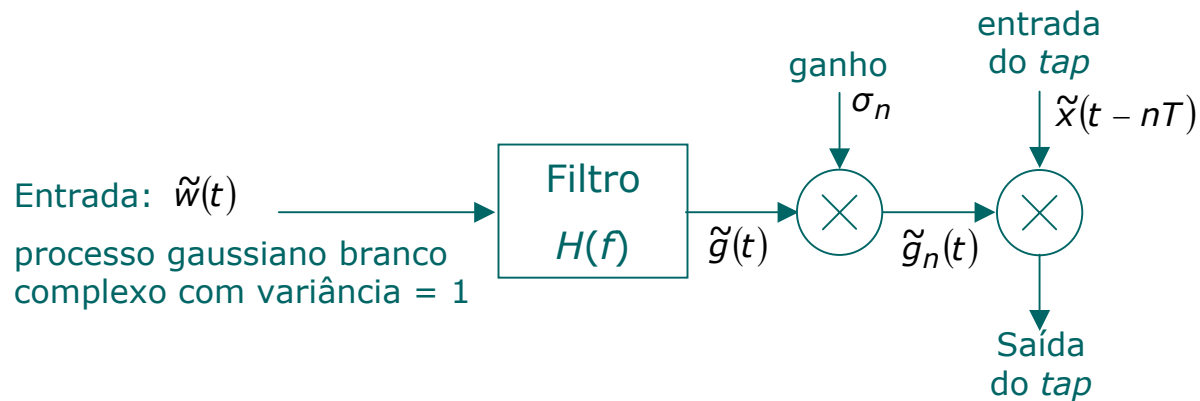
Assim, a parte real e a imaginária dos processos brancos complexos são independentes.

Modelo simplificado:

A resposta ao impulso do filtro formatador é real e a sua função de transferência de amplitude é dada por:

$$H(f) = \sqrt{S(f)}$$

onde  $S(f)$  é o espectro de potência Doppler.



## Espectros:

- **espectro plano:** nada precisa ser feito só um escalonamento e a limitação em faixa para o processo desejado. Por exemplo, se o espectro plano desejado é  $S(f) = A$  e  $|f| \leq B$ , então o filtro formatador será um FPB ideal  $H_f(f) = \sqrt{A}$ ,  $|f| \leq B$
- **espectro gaussiano:**  $S_G(f) = A \exp(-kf^2)$  onde  $k$  é escolhido para definir a largura de faixa desejada. O filtro formatador é então dado por

$$H_G(f) = \sqrt{S_G(f)} = \sqrt{A} \exp\left(-\frac{1}{2}kf^2\right)$$

$$h_G(t) = \sqrt{\frac{2\pi A}{k}} \exp\left[-\left(\frac{2\pi^2}{k}\right)t^2\right]$$

- espectro de Jakes:

$$S_J(f) = \frac{A}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}}$$

onde  $f_d$  é a maior frequência Doppler.

Para obter a resposta do filtro formatador temos

$$S_J(f) = S_f(f) |H_J(f)|^2$$

$S_f(f)$  possui espectro plano e  $H_J(f)$  é a resposta em frequência de Jakes. Assumindo  $S_f(f) = 1$ , temos

$$H_J(f) = \sqrt{S_J(f)} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}}$$

Como  $H_J(f)$  é uma função real simétrica,  $h_J(t)$  é dada por:

$$\begin{aligned}h_J(t) &= \mathfrak{S}^{-1}[H_J(f)] = 4\sqrt{\frac{2\pi^2 A^2}{x}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) f_d J_{1/4}(x) \\ &= 2,583\sqrt{A}f_d \frac{1}{\sqrt[4]{x}} J_{1/4}(x)\end{aligned}$$

onde  $J_{1/4}(\cdot)$  é a função de Bessel fracional e  $x = 2\pi f_d |t|$ . Esta equação pode ser aproximada para um filtro FIR.

O ganho do filtro  $A^{1/2}$  é escolhido para que  $h_J(t)$  tenha sua potência normalizada em 1.

Os ganhos  $\tilde{g}_n$  individuais devem ser escalonados de forma apropriada para levar em conta as potências diferentes de cada *tap*.



Note que a largura de faixa dos processos de ganhos de *tap* dos canais que variam lentamente com o tempo são menores que a do sinal que trafega por ele.

Simulações do filtro em altas taxas  $\Rightarrow$  problemas de estabilidade e ineficiência computacional  $\Rightarrow$  podem ser evitados por técnicas de multitaxas.

## 6. Canais sem Fio em Ambientes Fechados

O número de percursos que contribuem para o total da potência recebida é muito maior que para canais sem fio móveis  $\Rightarrow$  paredes, móveis, teto, chão, pessoas, etc.

Os modelos de canais em ambientes fechados caem na categoria do multipercurso discreto e podem ser considerados casos especiais de

$$y(t) = \sum_n a_n(t)s(t - \tau_n(t))$$

A caracterização estatística e os valores dos parâmetros são dependentes de meio físico.

A distinção entre desvanecimento por sombreamento e por multipercurso não é apropriada em canais em ambientes fechados.

Espectro Doppler é plano.

### 6.1 Modelo de edifícios amplos e fábricas (*Open plans*)

**Exemplos:** armazéns, supermercados, etc.

Resposta ao impulso passa-baixas equivalente:

$$\tilde{c}(\tau, t) = \sum_{k=1}^L a_k \exp(-j\theta_k) \delta(t - \tau_k)$$

As fases  $\theta_k$  possuem distribuições independentes e identicamente uniformes sobre  $[0, 2\pi]$ ,  $L$  é o número de percursos,  $a_k$  são as amplitudes dos percursos e  $\tau_k$  são os atrasos.

O número de percursos  $L$  possui aproximadamente uma distribuição normal.

A função densidade de probabilidade das componentes de tempos de chegada  $\tau_k$  é uma função linear do **atraso em excesso**, assumindo que as componentes de multipercurso em um dado perfil chegam de modo independente mas com diferentes probabilidades.

Amplitude do desvanecimento de amplitude:

**Modelo de larga escala:** a distribuição cumulativa das potências locais médias das componentes multipercurso individuais seguem uma distribuição log-normal com desvio padrão de 5,4 dB.

**Modelo de pequena escala:** as estatísticas do desvanecimento ocorrem com pequenas variações na localização do receptor, sendo descrita por uma distribuição log-normal sobre a potência média local de componentes multipercurso individuais, onde o desvio padrão é uma variável aleatória que possui uma distribuição exponencial.

Resposta ao impulso média local é usada para calcular:

- a perda de percurso,
- parâmetros de multipercurso: atraso em excesso médio e espalhamento de atraso rms, assumindo canal estacionário no sentido amplo sobre um espaço de aproximadamente 10 comprimentos de onda.

As fases  $\theta_k$  são uniformemente i.i.d., logo a potência total recebida é a superposição de potência média entregue por cada percurso.

A potência total recebida tendo uma distância de percurso igual a  $d$  varia aleatoriamente, pois depende do meio de propagação. Assim, o modelo de perda de percurso é:

$$PL(d) = PL(d_0) + 10n \log(d/d_0) + X_\sigma \quad [\text{dB}]$$

$n$  = índice de perda de percurso ( $\sim 2,2$ )

$X_\sigma$  = variável aleatória, aproximadamente com distribuição gaussiana com desvio padrão entre 5 – 9 dB.

$d_0$  é a distância de visada direta entre o transmissor e o receptor.

Baseado em medidas de atraso de multipercurso entre 40 e 800 ns temos que o espalhamento de atraso rms = 30 a 300 ns (distribuição uniforme com média de 100 ns é uma boa aproximação).

As figuras a e b a seguir mostram perfis de atraso único.

E as figuras c e d mostram os perfis de atraso separados por  $1/4$  de comprimento de onda ao longo de uma linha de visada direta entre o Tx e o Rx.

## Exemplos de perfis de atraso em uma loja de varejo:

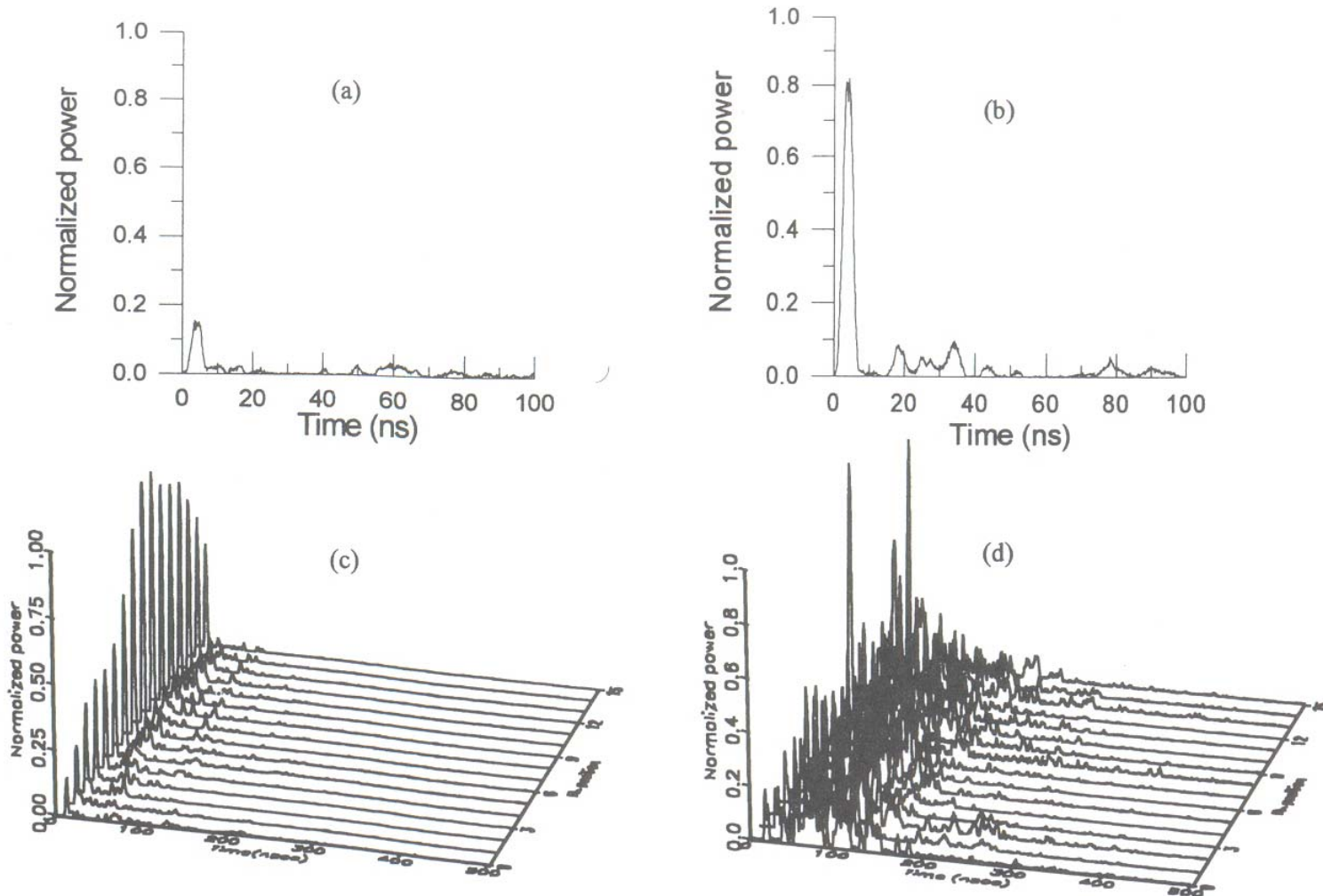


Figure 9.19. Illustration of the measurement of single delay power profiles and scattering functions in a retail store.

## Exemplos de perfis de atraso em uma loja de varejo:

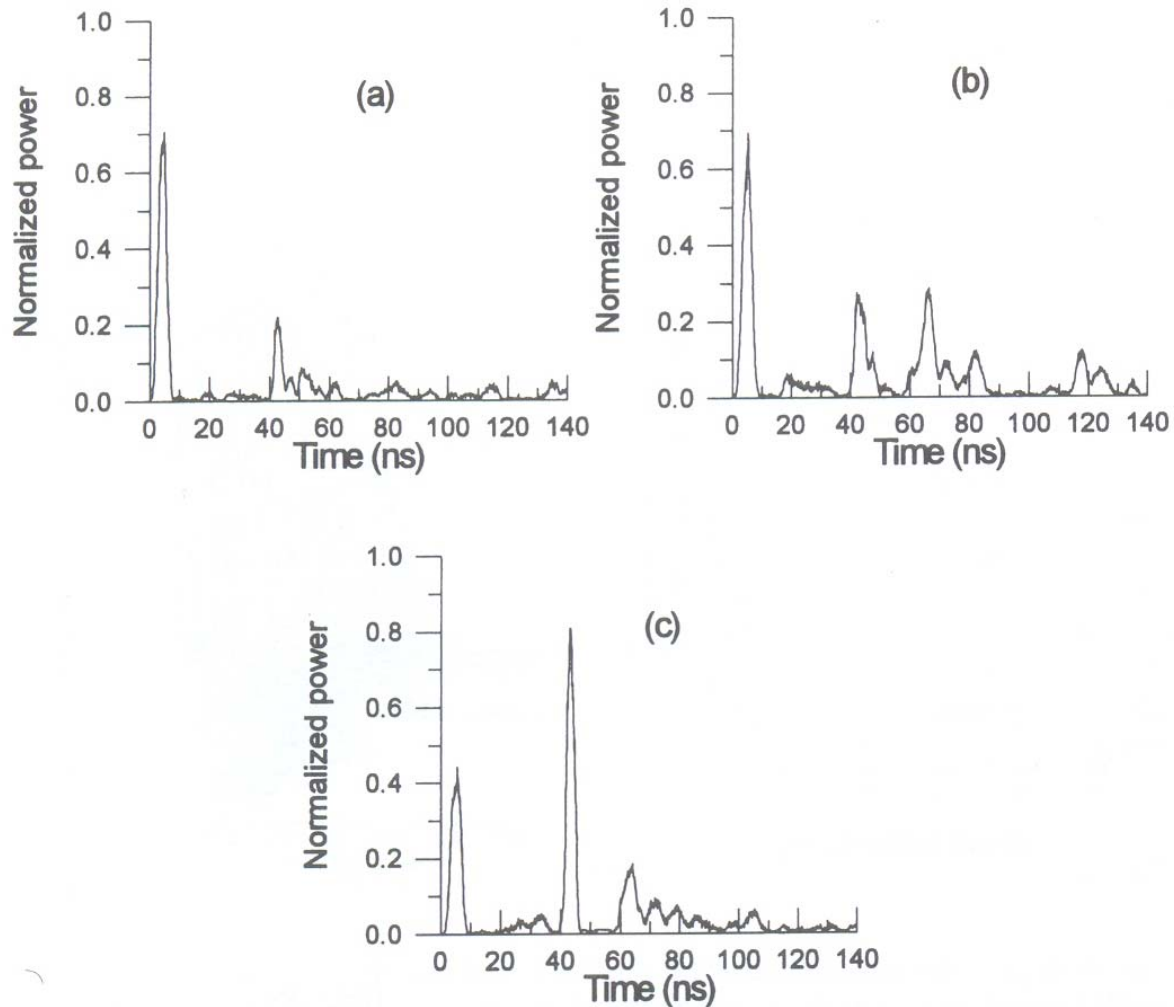


Figure 9.20. Additional measurements of delay power profiles with lightly obstructed paths in a retail store.

## 6.2 Modelo para escritórios

Neste tipo de meio, os raios do sinal chegam em grupos, onde os tempos de chegada dos grupos são modelados por um processo de Poisson com taxa  $\lambda$  fixa.

Dentro de cada grupo os raios também chegam obedecendo um processo de Poisson com uma taxa fixa  $\Gamma \ll \lambda$ .

Resposta ao impulso passa-baixas equivalente do canal é dada por:

$$\tilde{c}(\tau, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \exp(-j\theta_{kl}) \delta(t - T_l - \tau_{kl})$$



As fases  $\theta_{kl}$  são i.i.d. e uniformes sobre  $[0, 2\pi]$ . Os valores quadráticos médios são funções monotonicamente decrescente de  $T_l$  e  $\tau_{kl}$  como mostrado em

$$\overline{a_{kl}^2} = \overline{a^2(T_l, \tau_{kl})} = \overline{a^2(0,0)} \exp(-T_l/\Gamma) \exp(-T\tau_{kl}/\gamma)$$

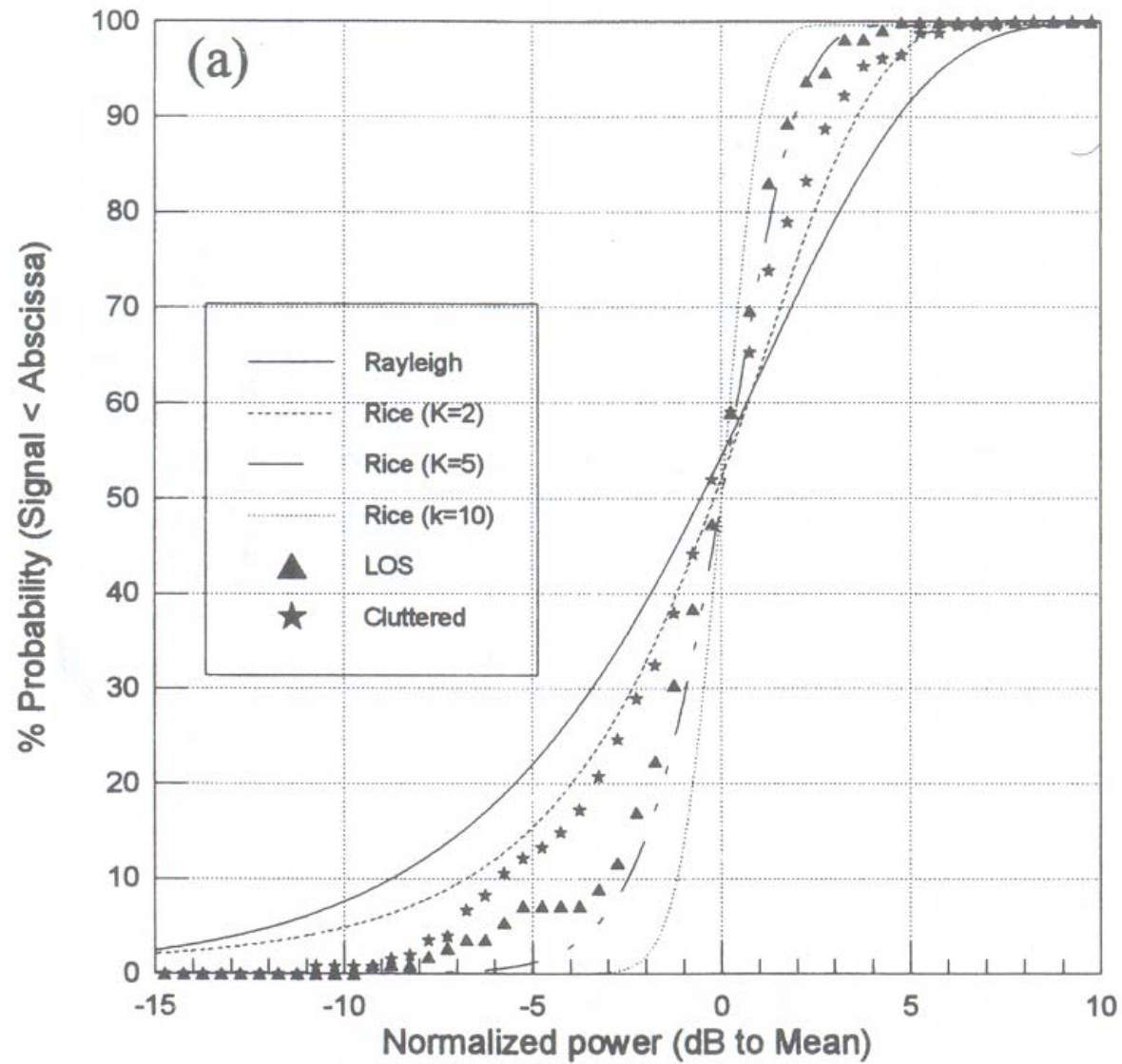
$\overline{a^2(0, 0)}$  = potência média do primeiro raio do primeiro grupo.

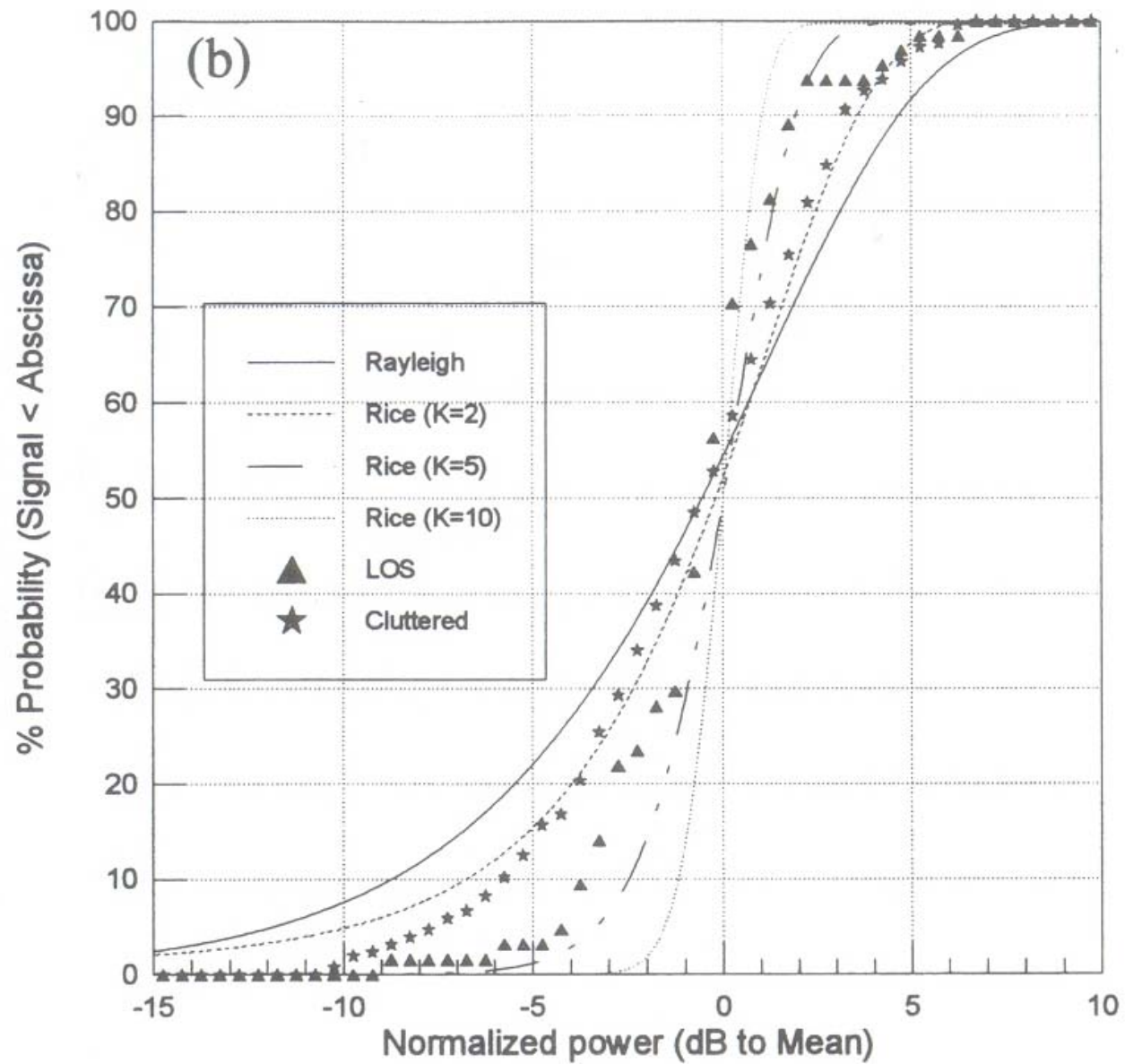
$\Gamma$  = constantes de tempo de atraso de potência para os grupos.

$\gamma$  = constantes de tempo de atraso de potência para os raios.

A distribuição de probabilidade das amplitudes normalizadas dos raios é independente dos atrasos associados e segue a função densidade de probabilidade Rayleigh.

Entretanto, também pode ser usada para a distribuição das amplitudes uma aproximação para a distribuição de Rice com o fator  $K = 5$  para percurso LOS entre Tx e Rx, como mostrado nas figuras a seguir.





A distribuição para percursos não LOS e ambientes fortemente desordenados (*cluttered*) ao redor dos receptores e transmissores não parecem seguir a distribuição de Rice com o fator  $K = 2$ . (distribuição de Rayleigh).

Raios e grupos de raios geralmente se estendem por tempo infinito, entretanto, as exponenciais da representação da resposta ao impulso do canal se tornam muito pequenas além de  $l = L$  e/ou  $k = K$ , assim

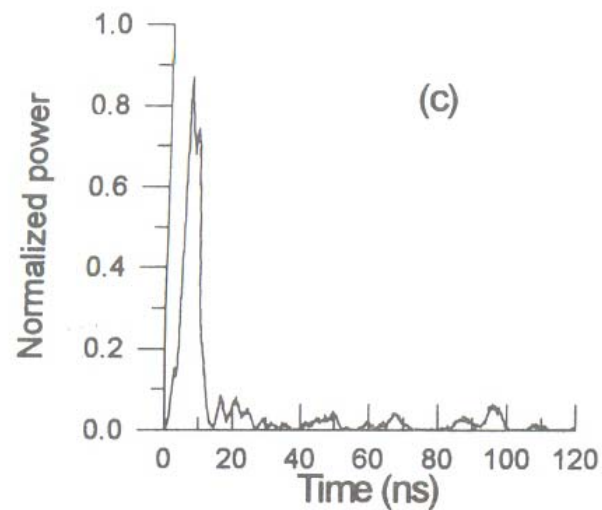
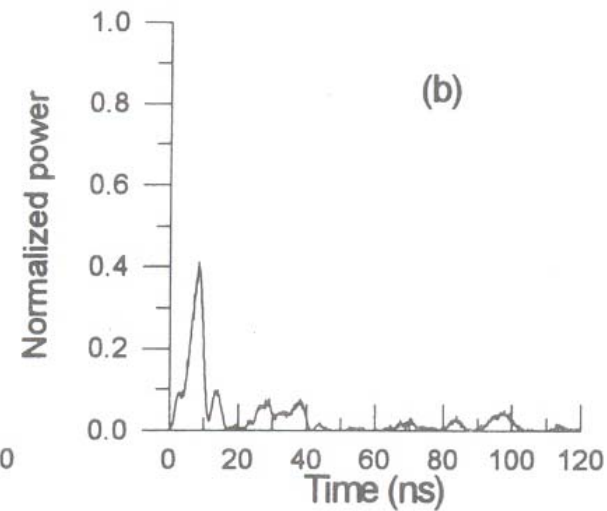
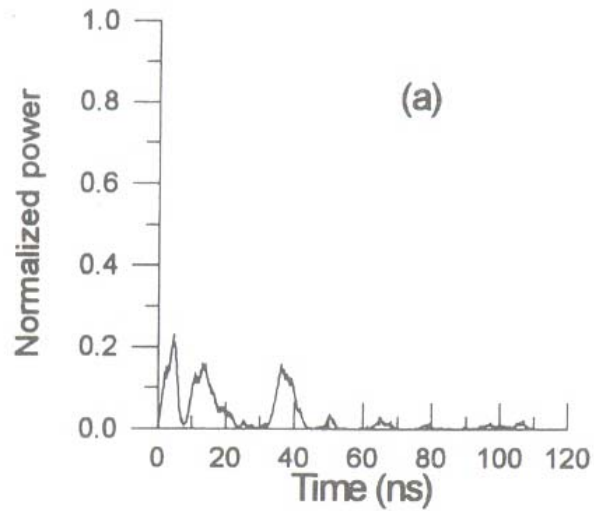
$$\tilde{c}(\tau, t) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K a_{kl} \exp(-j\theta_{kl}) \delta(t - T_l - \tau_{kl})$$

$L$  e  $K$  dependem do meio, geralmente são ajustados por processos de otimização.

O espalhamento de atraso rms em salas de edifícios possui valor médio de 25 ns e máximo de 50 ns.

O índice de perda de percurso encontra-se entre 3 e 4.

## Exemplos de perfis de potência de atraso em prédios de escritórios



### 6.3 Modelo de predição por traçados de raios (*ray-tracing*)

Medidas em ambientes internos (*indoor*): sinais CW ou pulsados.

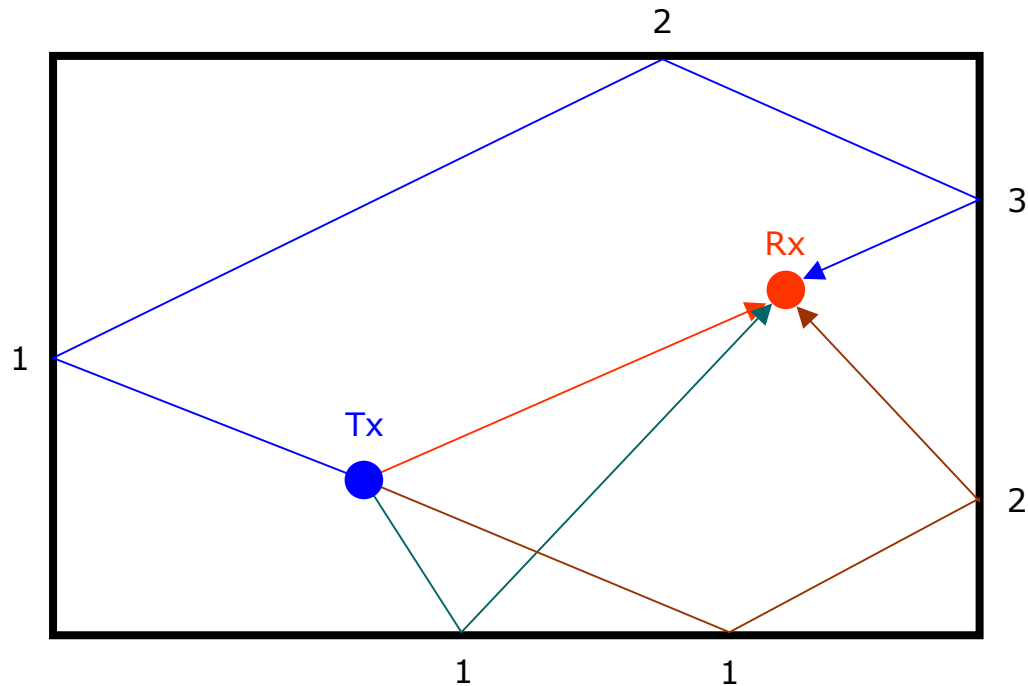
Análise estatística não produz um modelo adequado do sistema de comunicações.

**Solução:** modelos teóricos de predição da perda de percurso e do espalhamento de atraso.

**Ferramenta:** WiSE modelo de propagação em 3D por traçados de raios entre a estação base e um ponto específico em um ambiente fechado.

O modelo prediz a média local da potência do sinal recebida em um dado ponto para a consideração de i.i.d. para o ângulo de fase de cada componente.

## Exemplo: Ray Tracing bi-dimensional em uma sala:

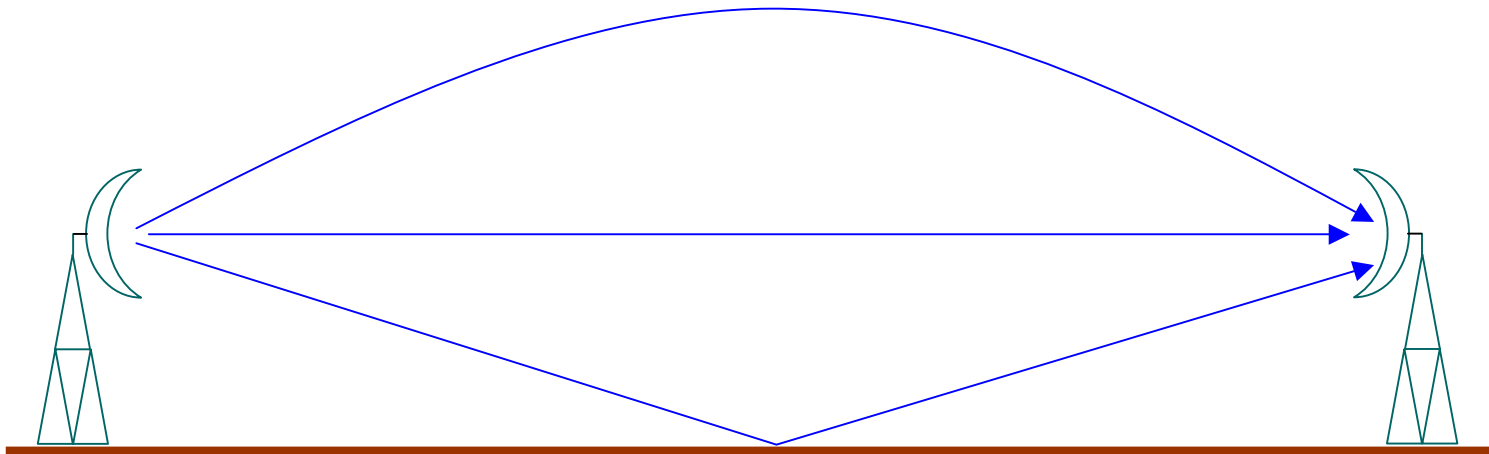


4 paredes:

- 4 reflexões de 1ª ordem
- 12 reflexões de 2ª ordem
- 48 reflexões de 3ª ordem

## 7. Modelo de canal com desvanecimento multipercurso discreto de rádio com linha de visada direta (LOS)

Variações das condições atmosféricas afetam este tipo de canal.



Modelo de 3 raios de Rummmler:

$$y(t) = s(t) + \alpha s(t - \tau_1) + \beta s(t - \tau_2)$$

$y(t)$  = saída passa-faixa

$s(t)$  = entrada passa-faixa



Envoltória complexa:

$$\tilde{y}(t) = \tilde{s}(t) + \alpha \tilde{s}(t - \tau_1) \exp(-j2\pi f_c \tau_1) + \beta \tilde{s}(t - \tau_2) \exp(-j2\pi f_c \tau_2)$$

$f_c$  = freqüência da portadora.

Função de transferência passa-baixas:

$$\tilde{H}(f) = 1 + \alpha \exp(-j2\pi(f_c - f)\tau_1) + \beta \exp(-j2\pi(f_c - f)\tau_2)$$

Substituindo  $(f - f_c)$  por  $f$  onde  $|f| \leq B/2$  e  $B$  = faixa de freqüência do canal.

Assumimos também que  $B\tau_1 \ll 1 \Rightarrow$  desvanecimento não seletivo, então  $\exp(-j2\pi f\tau_1) \approx 1$ , logo

$$\tilde{H}(f) = 1 + \alpha + \beta \exp(-j2\pi f\tau_2)$$

$|H(f)|$  possui um mínimo (*notch*) em  $f_0$ .

Substituindo  $\tau_2 = [(f - f_0)/f]\tau$ , onde  $\tau$  é um atraso constante, então

$$\tilde{H}(f) = a[1 - b \exp(-j2\pi(f - f_0)\tau)]$$

onde  $a = 1 + \alpha =$  atenuação total,

$\tau =$  atraso de percurso relativo do segundo raio, arbitrário  $\propto 1/(6B)$ , geralmente 6,3 ns.

$b = -\beta/(1 + \alpha) =$  amplitude relativa do segundo raio,

$2\pi f_0\tau =$  fase relativa do segundo raio.

Assim,

$$|\tilde{H}(f)|^2 = a^2[1 + b^2 - b \cos(2\pi(f - f_0)\tau)]$$

O atraso de grupo é dado pela derivada da característica de fase:

$$D(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(f)}{df} = \left( \frac{\tau}{2\pi} \right) \frac{b[b - \cos(2\pi(f - f_0)\tau)]}{1 + b^2 - 2b \cos[2\pi(f - f_0)\tau]}$$

Se  $b < 1 \Rightarrow$  função de transferência é de **fase mínima** (possui zeros na metade esquerda do plano  $s$ ).

Se  $b \geq 1 \Rightarrow$  função de transferência é de **fase não mínima** (possui zeros na metade direita do plano  $s$ ).

## Respostas típicas de amplitude e fase:

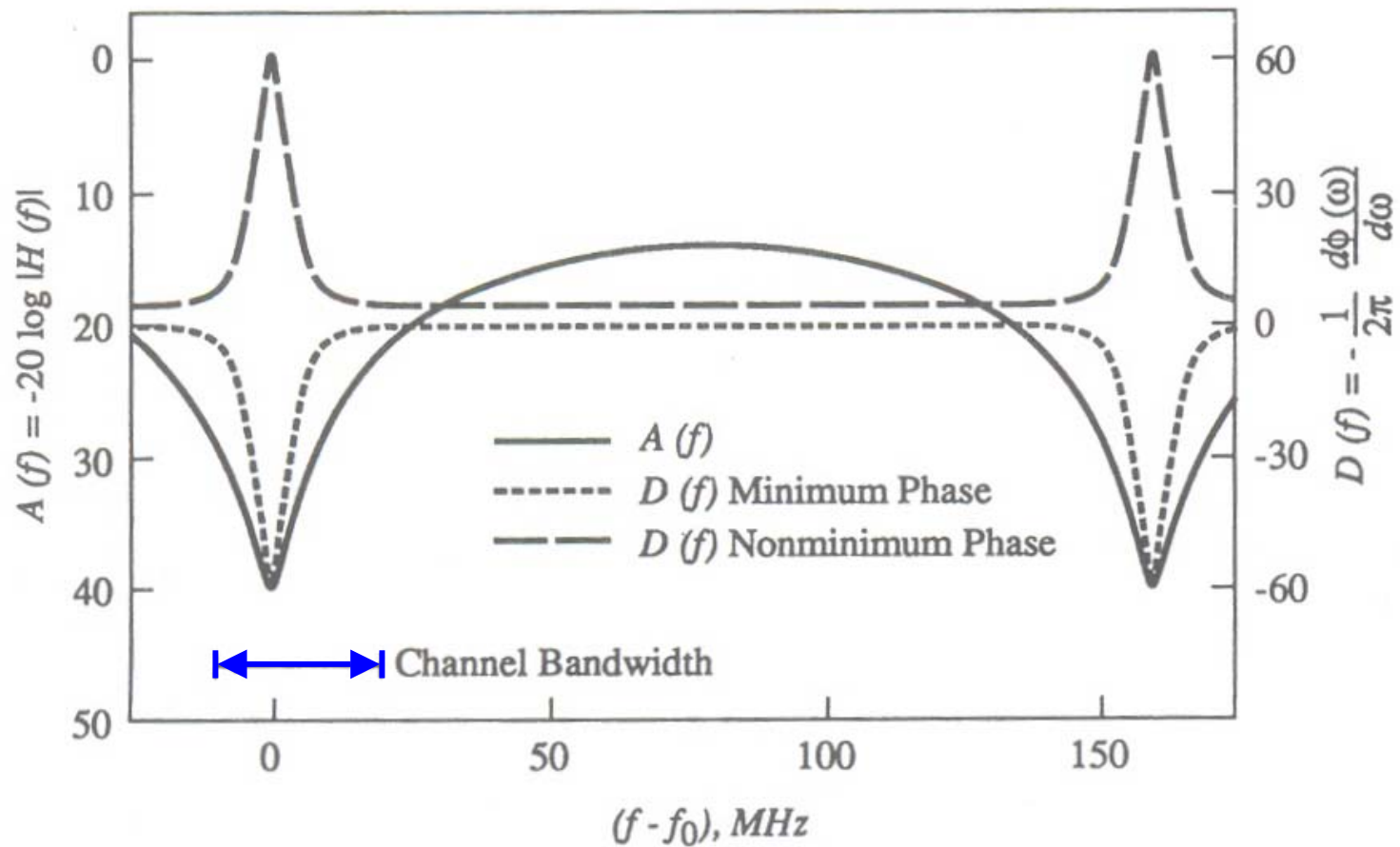


Figure 9.23. Typical amplitude and delay responses for Rummler's LOS fading channel model.

Resposta ao impulso do canal passa-baixas equivalente:

$$\tilde{h}(t) = a[\delta(t) - b \exp[-j2\pi f_0 \tau] \delta(t - \tau)]$$

Os parâmetros **a** e **b** são variáveis aleatórias cujas distribuições podem ser empiricamente determinadas.

**Conveniência:** distribuições na forma logarítmica.

Desvanecimentos de fase mínima:

$$A_1 = -20 \log a \quad [\text{dB}]$$

$$B_1 = -20 \log(1 - b) \quad [\text{dB}]$$

Desvanecimentos de fase não mínima :

$$\tilde{H}'(f) = ab[\exp(-j2\pi(f - f_0)\tau) - 1/b]$$

Assim, definimos:

$$A_2 = -20 \log(ab) \quad [\text{dB}]$$

$$B_2 = -20 \log(1 - 1/b) \quad [\text{dB}]$$

Os desvanecimentos de fase mínima e não mínima são igualmente prováveis e assumem distribuições idênticas:

1. Os parâmetros  $B_1$  e  $B_2$  possuem distribuição exponencial com média 3,8 dB.
2. Os parâmetros  $A_1$  e  $A_2$  são variáveis aleatórias gaussianas com média:

$$\mu = 24,6 \frac{B^4 + 500}{B^4 + 800} \quad [\text{dB}]$$

onde  $B = B_1$  para  $A_1$  e  $B = B_2$  para  $A_2$ . O desvio padrão de  $A_1$  e  $A_2$  é 5 dB.

Note que  $a$  e  $b$  são correlacionados.

A distribuição da fase  $\theta = 2\pi f_0 \tau$  está compreendida entre  $[-\pi, \pi]$  e possui densidade constante para cada seção  $|\theta| > \pi/2$  e  $|\theta| < \pi/2$  com

$$P\{\theta < \pi/2\} = 5P\{\theta > \pi/2\}$$

A freqüência do *notch* é dada por:

$$f_0 = \frac{\theta}{2\pi\tau} \quad \text{onde } \tau = 6,3 \text{ ns}$$

## 9.2 Canal Quase Espaço Livre

Propagação na atmosfera terrestre  $\Rightarrow$  fenômeno muito complexo.

**Aproximação:** canais espaço livre (ideal).

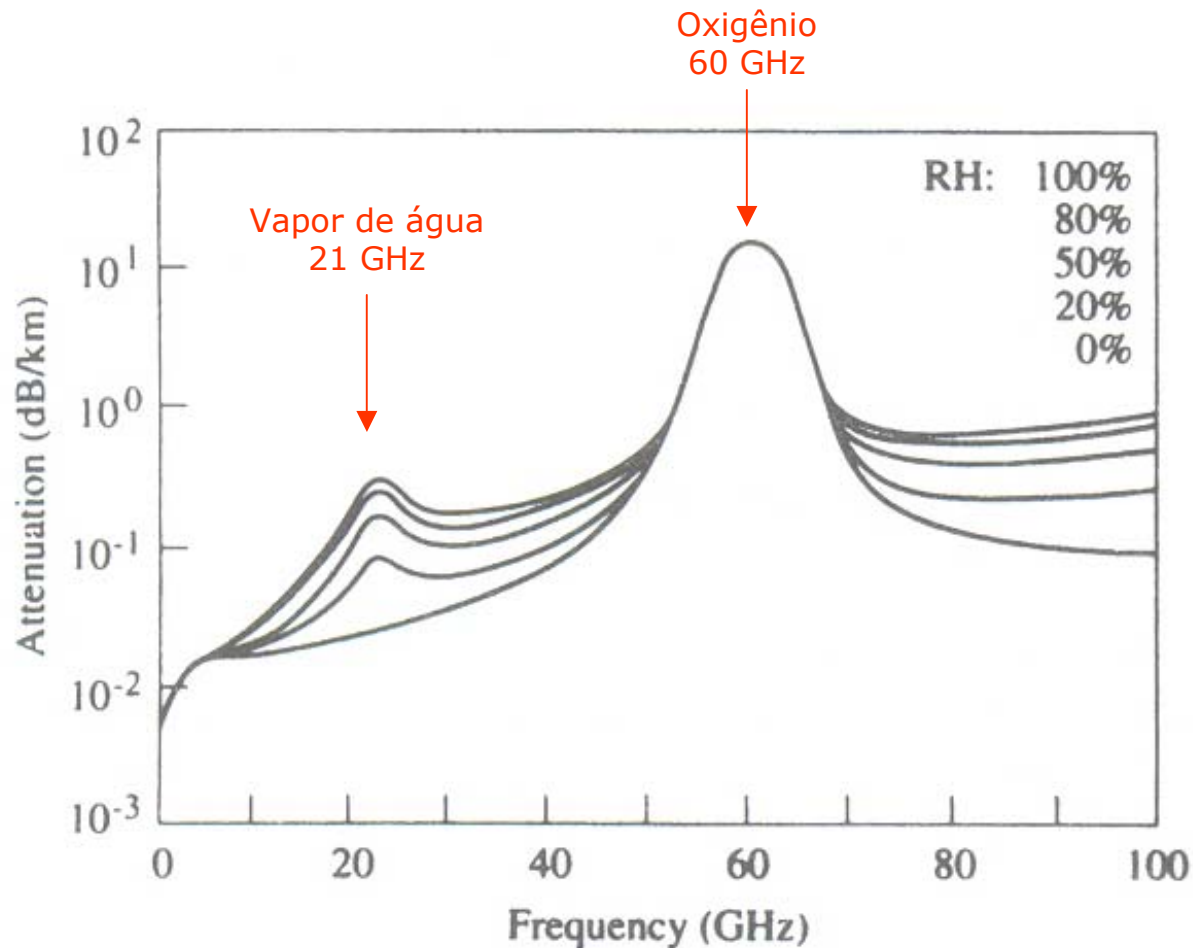
Efeitos de filtragem presentes no canal são acentuados com o aumento da freqüência de portadora e com a largura de faixa de freqüência.

Filtragem pelo canal:

- a. Canal atmosférico de ar claro (troposférico)
- b. Canal chuvoso
- c. Canal com distorção de fase (ionosférico)

## 1. Canal atmosférico de ar claro

A onda eletromagnética interage com o vapor de água e o oxigênio presentes na atmosfera.





A atmosfera age como um filtro em sinais com banda suficientemente larga.

Modelo analítico preferido é o modelo de Liebe:

$$H(f) = H_0 \exp\left[j0,02096 f(10^6 + N)L\right]$$

$N = N_0 + D(f) + jN''(f)$  refratividade complexa em partes por milhão.

$H_0$  = constante obtida por tabelas.

$N_0$  = refratividade independente da frequência.

$D(f)$  = absorção refrativa.

$N''(f)$  = absorção.

$L$  = distância em km.

## 2. Canal atmosférico chuvoso

Para freqüências de microondas acima de 10 GHz, chuva se torna o efeito dominante na propagação atmosférica.

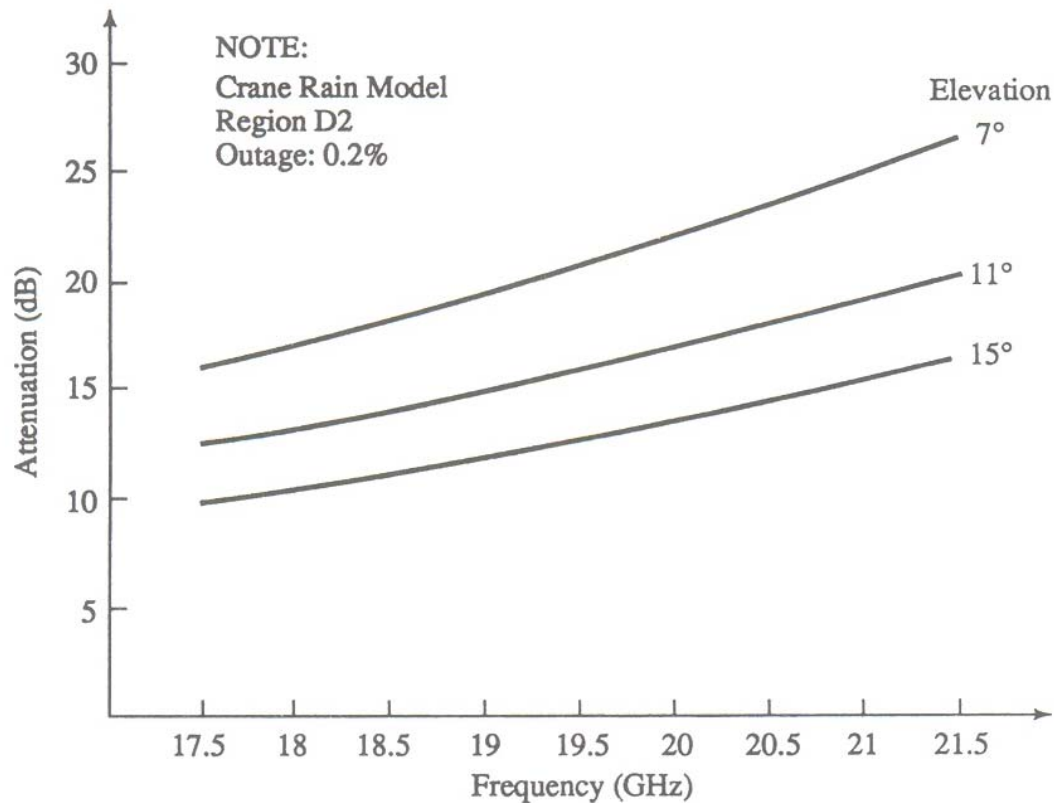


Figure 9.25. Rain attenuation as a function of frequency.

As curvas anteriores foram traçadas utilizando o modelo para chuva de Crane com probabilidade de indisponibilidade de 0,2%.

Efeito de despolarização de ondas de rádio com polarização dual devido a chuva:

Polarização dos sinais 1 e 2:

$$S_1(t) = \rho_1(t) \cos[\omega_1 t + \phi_1(t)]$$

$$S_2(t) = \rho_2(t) \cos[\omega_2 t + \phi_2(t)]$$

Modelo mais simples de despolarização:

Sinais recebidos:

$$R_1(t) = \alpha_{11} S_1(t) + \alpha_{21} S_2(t)$$

$$R_2(t) = \alpha_{12} S_1(t) + \alpha_{22} S_2(t)$$

O vazamento de polarização cruzada introduz interferência em cada sinal. Exemplo de interferência para o canal 1:

$$\text{XPI} = 20 \log (\alpha_{11}/\alpha_{21})$$

A simulação então é bastante simples.

Generalizando,

$$R_1(t) = h_{11}(t) * S_1(t) + h_{21}(t) * S_2(t)$$

$$R_2(t) = h_{12}(t) * S_1(t) + h_{22}(t) * S_2(t)$$

onde os  $h_{ij}(t)$  são respostas ao impulso.

### 3. Canal de fase ionosférica

Para bandas de frequências até a ordem de centenas de Megahertz, os efeitos da ionosfera na propagação é complexa mas pode ser caracterizada como um canal multipercurso variante no tempo.

Para canais satélite, a ionosfera pode ser modelada como um filtro passa-tudo com característica de fase não ideal.

O deslocamento de fase experienciado por uma onda de frequência  $f$  na ionosfera sobre e acima do camada (*lag*) de propagação de espaço livre, é dado por

$$\phi(f) = \frac{2\pi 40 \times 10^6}{cf} \int_{s_1}^{s_2} N_e(s) ds \quad (\text{rad})$$

$c$  = velocidade da luz (cm/s)

$N_e$  = concentração de elétrons por área (elétrons/cm<sup>2</sup>)

$s$  = percurso

O deslocamento de fase diferencial entre duas freqüências  $f_0$  e  $f_0 + \Delta f$  é dado por:

$$\begin{aligned}\Psi(\Delta f) &= \phi(f_0 + \Delta f) - \phi(f_0) = \frac{2\pi 40 \times 10^6 \Delta f}{cf_0(f_0 + \Delta f)} \int_{s_1}^{s_2} N_e(s) ds \\ &= \frac{\Delta f}{(f_0 + \Delta f)} K(f_0, N_e, s)\end{aligned}$$

Como podemos considerar  $\Delta f$  como sendo o ponto de partida a partir da freqüência central  $f_0$ , com  $\Delta f \rightarrow f$ , podemos ver que

$$\Psi(f) = K \frac{f}{(f_0 + f)}$$

é a características de filtragem equivalente passa-baixas. Se a freqüência for normalizada em  $f_0$  temos:

$$\Psi(v) = K \frac{v}{(1 + v)}$$

## Característica dependente da frequência $\nu/(\nu+1)$ :

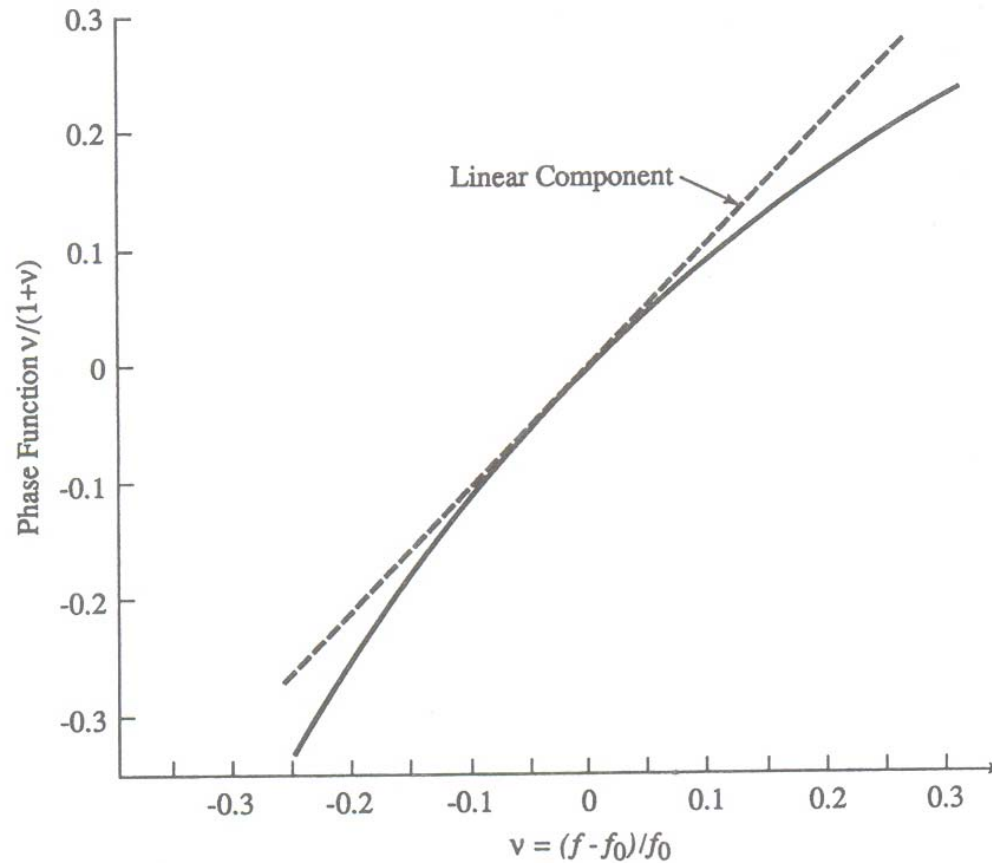


Figure 9.26. Ionospheric lowpass-equivalent phase characteristic.

Note da figura que é simples implementar a função uma vez que ela é dominada pela fase parabólica.

Se  $\Psi(v)$  for expandido em série de potências, ou for decomposto em polinômio de mínimos quadrados, então o termo em  $v^2$  é o maior valor que não leva à distorção depois de  $v$ , para valores de banda fracionais típicas:  $|v| \leq B/f_0 < 0,1$ .

Assim, usando série de Taylor desenvolvida em torno de  $v = 0$ , obtemos:

$$\frac{\Psi(v)}{K} = \frac{v}{1+v} = v - v^2 + R_3$$

onde o resto é  $R_3 \leq Mv^3/3!$

$M \geq |\Psi'''(u)/K| = 6(1+u)^4 = 0,1$  para  $u = -B$  (valor máximo)

$$|u| \leq B$$

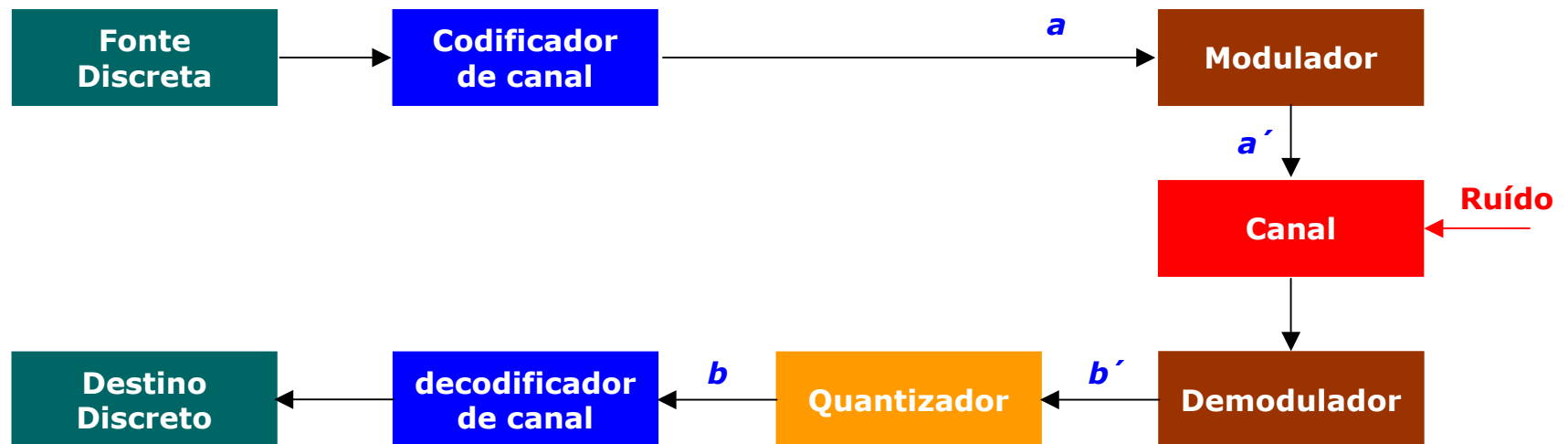
Assim,  $R_3 = v^3/(0,9)^4 \approx 1,5v^3$  para  $v = -0,1 \Rightarrow$  magnitude do resto relativa ao termo quadrático é  $1,5v^3/v^2 = 0,15$ .



Isto significa que o termo  $v^2$  de fase parabólica domina sobre uma banda fracional razoável.

Assim, para modelar o efeito da ionosfera basta utilizar um filtro funcional de fase parabólica.

## 9.4 Modelos de Canal de Estados Finitos





Relação entre  $a$  e  $b$  é afetada por distorção e ruído introduzidos pelos filtros e outros elementos entre eles.

Canais de estados finitos:

- sem memória, não há correlação entre temporal no mecanismo de transição, erros independentes.
- com memória, existe correlação temporal no mecanismo de transição, erros ocorrem em surtos.

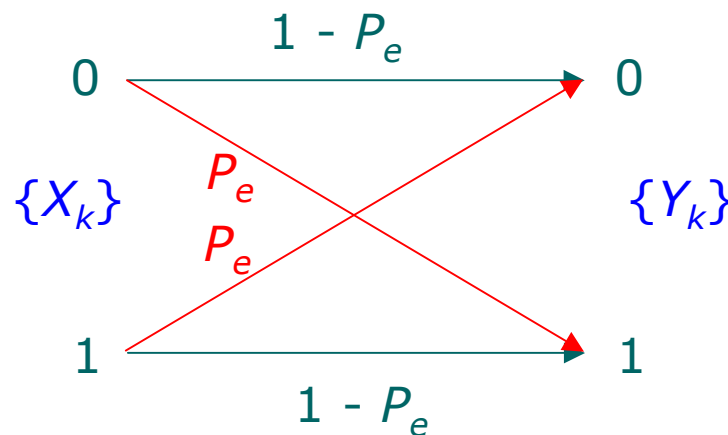
Modelos de canais de estados finitos são utilizados para projetar e analisar codificadores controladores de erros, entrelaçadores, redes, etc.

Canais sem memória são fáceis de simular, basta caracterizar a probabilidade de erro de bit.

Canais com memória são mais difíceis de modelar  $\Rightarrow$  erros correlacionados temporalmente são gerados por cadeias de Markov discretas.

Simulação de um modelo de estados finito consiste na geração de números aleatórios antes da transmissão de cada símbolo para determinar o estado do canal e então utilizar um outro gerador de números aleatórios para determinar a transição da entrada para a saída.

### 1. Modelos de canais sem memória de estados finitos



O canal é simétrico de modo que os 0's e os 1's são afetados da mesma maneira.

Relação entrada/saída:

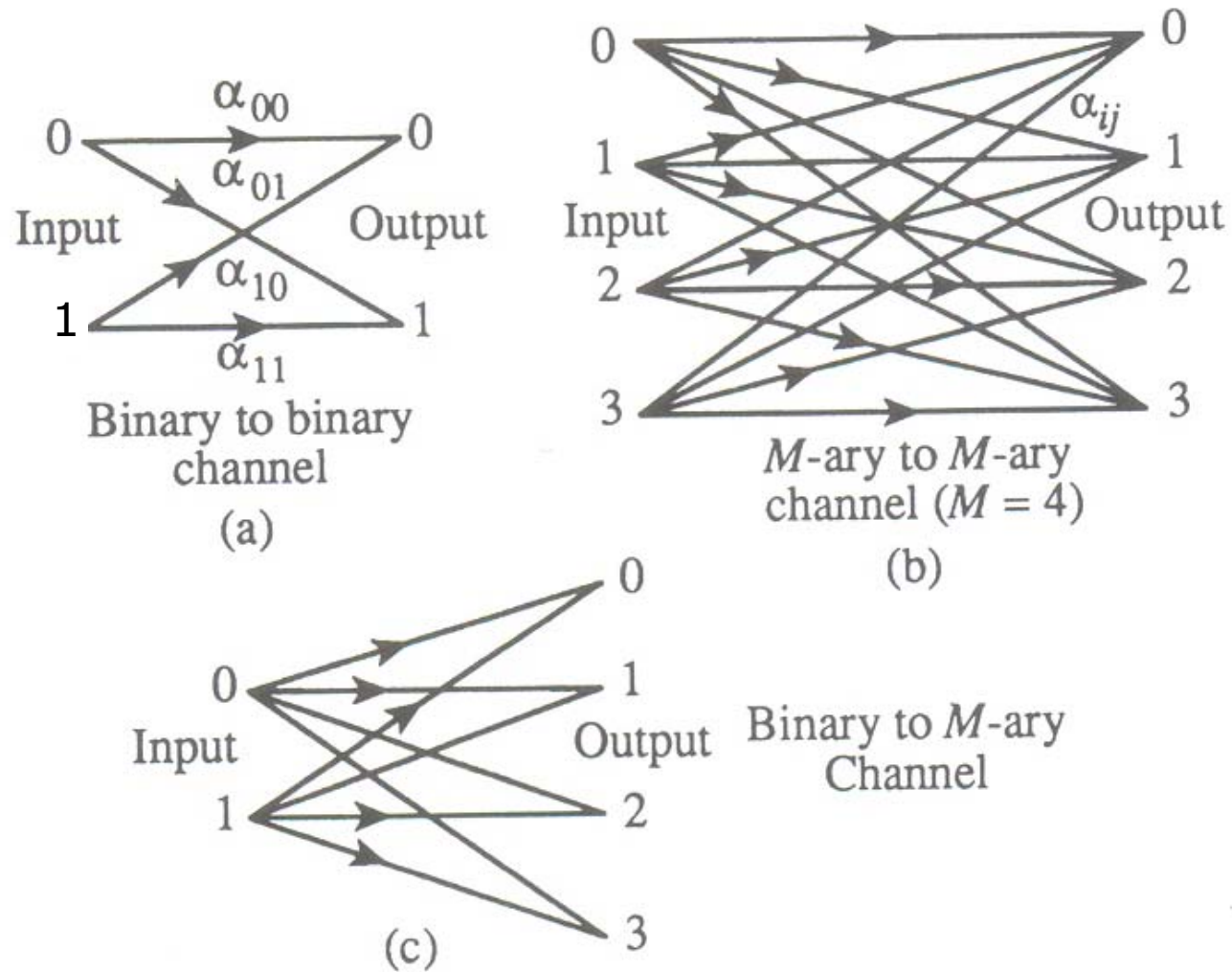
$$Y_k = X_k \oplus \varepsilon_k$$

$\varepsilon = 1 \Rightarrow$  erro ocorreu

$P_e =$  probabilidade de erro

Exemplos de canais são simétricos:

Estes canais são caracterizados por probabilidades de transição  $\alpha_{ij}$ , onde  $i, j = 0, 1$ .



## 2. Modelos de estados finitos com memória: Modelos de Markov escondidos (*Hidden Markov Models* - HMM)

Existem várias técnicas eficientes para estimar os parâmetros das seqüências de Markov a partir de padrões de erro medidos ou simulados.

Canal com desvanecimento onde a potência do sinal recebido está acima de um certo limiar aceitável durante parte do tempo e em desvanecimento profundo na outra parte.

Então,

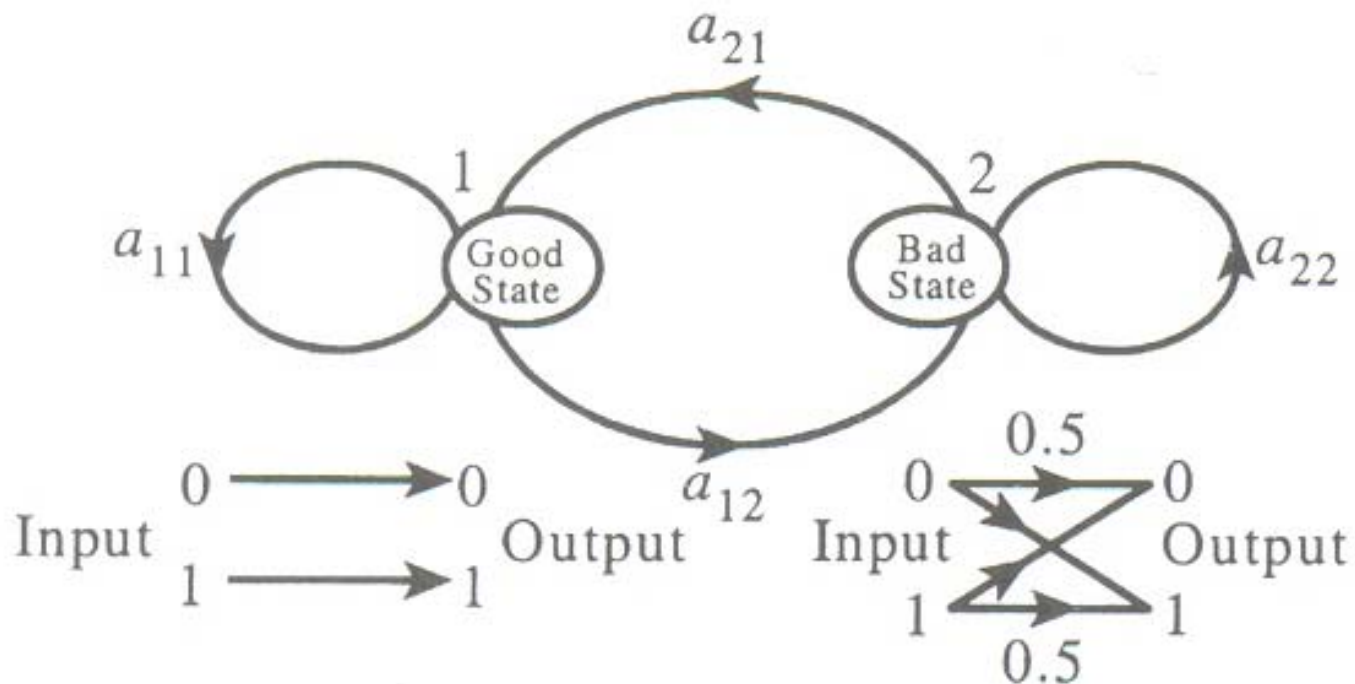
- a) estado bom: o sinal recebido é forte o bastante de tal forma que a probabilidade de um erro de transmissão é praticamente 0.
- b) estado ruim: o sinal recebido é tão fraco que a probabilidade de erro é próxima de 0,5.

O canal migra do estado bom para o ruim e vice-versa, no tempo.

O tempo em cada estado depende da correlação temporal do processo de desvanecimento.

Modelo de Gilbert:

Modelo discreto de canal, onde o tempo é medido em símbolos.



## 2.1 Modelo de Markov de $N$ estados:

- Conjunto de estados:  $\{1, 2, \dots, N\}$
- Estado no instante  $t$ :  $S_t$
- Conjunto de probabilidades:

Probabilidade de se estar no estado  $i$  no tempo  $t$ :

$$\pi_i(t) = P[S_t = i] \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- Conjunto de probabilidades de transição:

Probabilidade de ir do estado  $i$  no tempo  $t$  para o estado  $j$  no tempo  $t + 1$ :

$$a_{ij}(t) = P[S_{t+1} = j | S_t = i] \quad i = 1, 2, \dots, N$$

- Conjunto de probabilidades de transição entrada-para-saída para cada estado:

Símbolos erro:  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$ ; se binário  $E = \{0, 1\}$

$$b_i(e_k) = P[\text{símbolo erro } e_k \text{ ocorrer} | S_t = i]$$



Saída do processo consiste da seqüência de estados  $\{S_t\}$  e da seqüência de erros:  $\{e_t\}$ ; onde  $t$  é o tempo dado em símbolos.

Geralmente, só a entrada e a saída do canal são conhecidos, os estados intermediários estão escondidos  $\Rightarrow$  HMM.

## 2.2 Processos de Markov de 1ª ordem:

Propriedade para processo de Markov com  $m$  memórias:

$$P[S_{t+1} | S_t, S_{t-1}, \dots] = P[S_{t+1} | S_t, S_{t-1}, \dots, S_{t-m+1}]$$

Se o processo é de 1ª ordem:

$$P[S_{t+1} | S_t, S_{t-1}, \dots] = P[S_{t+1} | S_t]$$

## 2.3 Estacionaridade

Modelo de Markov para canais discretos  $\Rightarrow$  estacionários  $\Rightarrow \pi_i(t), a_{ij}(t)$  e  $b_i(e_k)$  não dependem de  $t$ .

$$P[S_{t+1} = i] = \pi_i = \sum_{k=1}^N P[S_{t+1} = i | S_t = k]P[S_t = k] = \sum_{k=1}^N a_{ki}\pi_k$$

Em termos de representação matricial:

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\Pi}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_N \end{bmatrix}$$

Note que:

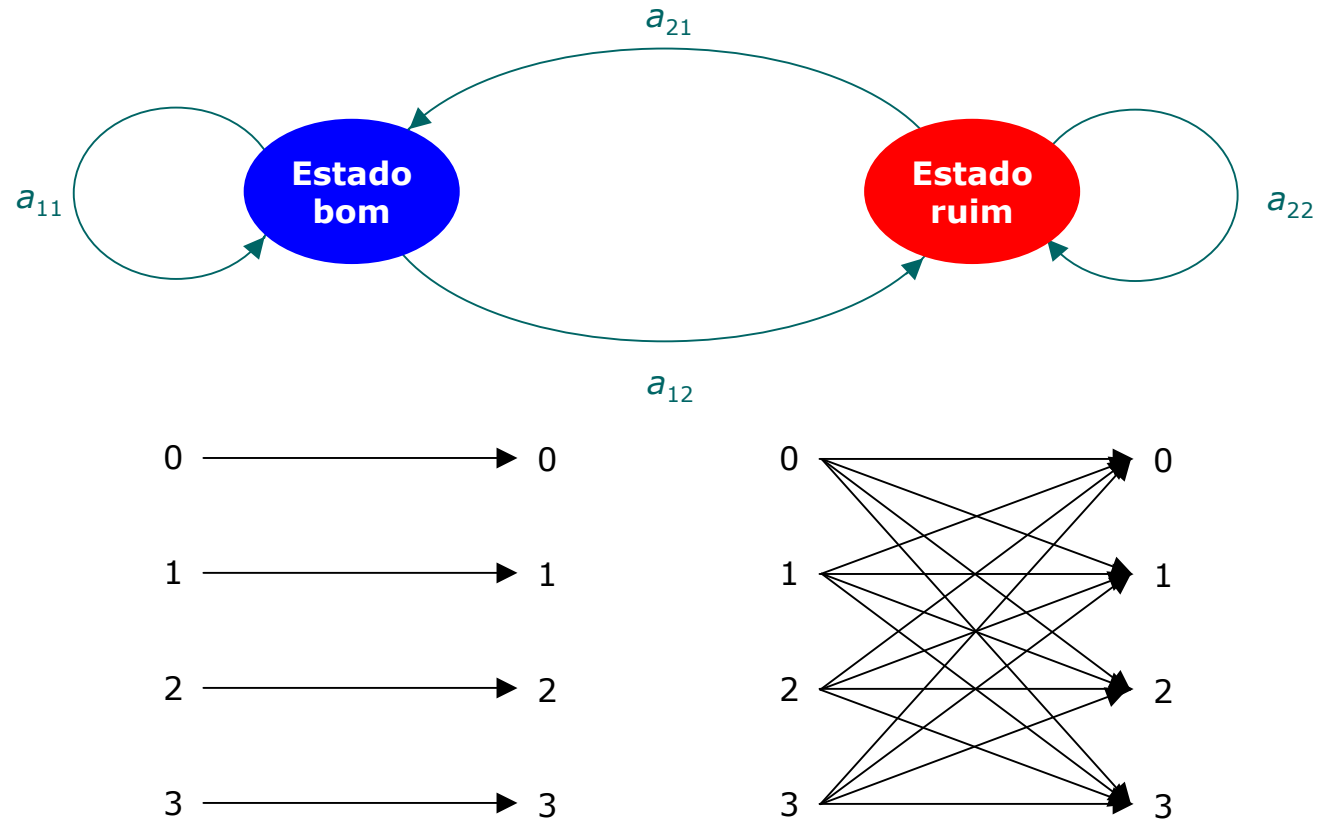
$$\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$$

Assim,  $\pi_i$  são unicamente determinados pelos  $a_{ij}$ , portanto o modelo de Markov é completamente definido pela matriz  $A$  e pela matriz  $B$  de probabilidades de transição entre a entrada e a saída.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{NM} \end{bmatrix}, \quad b_{ik} = b_i(e_k)$$

$b_i(e_k)$  é a probabilidade de se observar o símbolo erro  $e_k$  no estado  $i$ .

**Exemplo:** Sistema de comunicações quaternário ( $M = 4$ ) com um canal representado por um modelo de Markov de  $N = 2$  estados:



Matriz de transição de estados:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,8 \\ 0,1 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix}$$

$\pi_1 + \pi_2 = 1$ , então,  $\pi_1 = 8/9$  e  $\pi_2 = 1/9$ .

Probabilidades de transição entrada-saída:

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

$e_k = S_r - S_t$ ,  $S_r$  = símbolo recebido,  $S_t$  = símbolo transmitido.

$\mathbf{S}_1$  = estado bom com probabilidades  $b_{1k} = b_1(e_k)$

$\mathbf{S}_2$  = estado ruim com probabilidades  $b_{2k} = b_2(e_k)$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix}$$

Probabilidades de erro médias:  $P_{ave,k} = \mathbf{\Pi}^T \mathbf{b}_k$ :

$\mathbf{b}_k$  é a  $k$ -ésima coluna da matriz  $B$ .

$$P_{ave,1} = 8/9 \times 0,8 + 1/9 \times 0,0 = 0,711$$

$$P_{ave,2} = 8/9 \times 0,1 + 1/9 \times 0,4 = 0,133$$

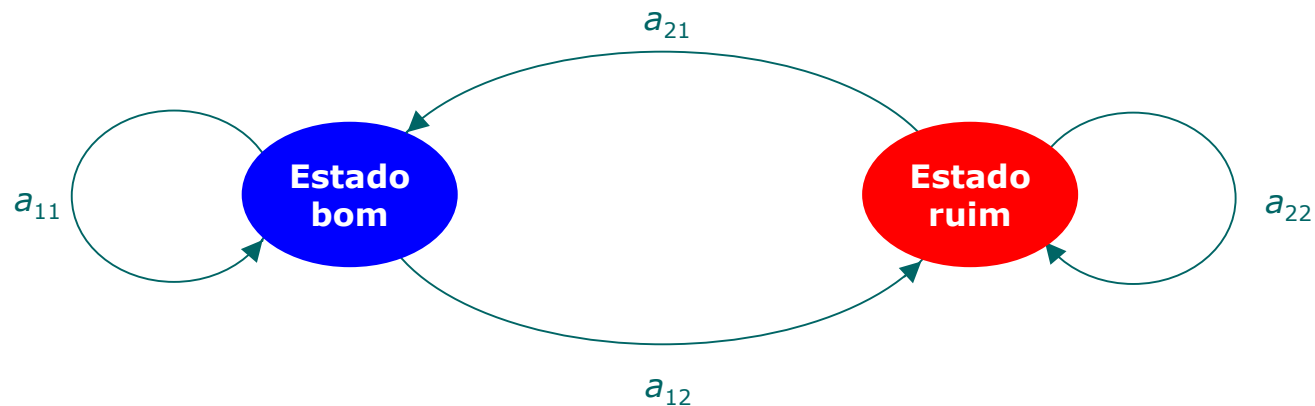
$$P_{ave,3} = 8/9 \times 0,1 + 1/9 \times 0,4 = 0,133$$

$$P_{ave,4} = 8/9 \times 0,0 + 1/9 \times 0,2 = 0,022$$

### 3. Tipos de Modelos de Markov escondidos: Modelos de Gilbert e de Fritchman

Modelo de Gilbert:

Dois estados: bom e ruim.



Usado para calcular a capacidade de um canal com erros em surtos.

Modelo de Fritchman:

$k$  estados bons (G) e  $N - k$  estados ruins (B).

Matriz de transição de estados **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{GG} & A_{GB} \\ A_{BG} & A_{BB} \end{bmatrix}$$

onde as submatrizes representam as probabilidades de transição entre os vários estados bons e ruins.

Seja  $\mathbf{O} = \{O_1, O_2, \dots, O_T\}$  a seqüência de erros.

$O_k = 1 \Rightarrow$  indica que o  $k$ -ésimo bit transmitido sofreu um erro de transmissão.

$O_k = 0 \Rightarrow$  indica que o  $k$ -ésimo bit transmitido não houve erro de transmissão.



$(0^m|1)$  = evento de observar  $m$  ou mais transmissões sem erro consecutivas seguindo um erro.

$(1^m|0)$  = evento de observar  $m$  ou mais transmissões com erro consecutivas seguindo um bom período.

Então,

$$P(0^m | 1) = \sum_{i=1}^k f_i \lambda_i^{m-1}$$

$$P(1^m | 0) = \sum_{i=k+1}^N f_i \lambda_i^{m-1}$$

onde  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  e  $(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \dots, \lambda_N)$  são os autovalores de  $A_{GG}$  e  $A_{BB}$ , respectivamente.

$f_i$  = funções de  $a_{ij}$ .

Assim, as probabilidades de se obter exatamente  $m$  zeros ou  $m$  uns são, respectivamente:

$$P(0^{m-1} | 1) - P(0^m | 1) = \sum_{i=1}^k f_i \lambda_i^{m-1} (1 - \lambda_i)$$

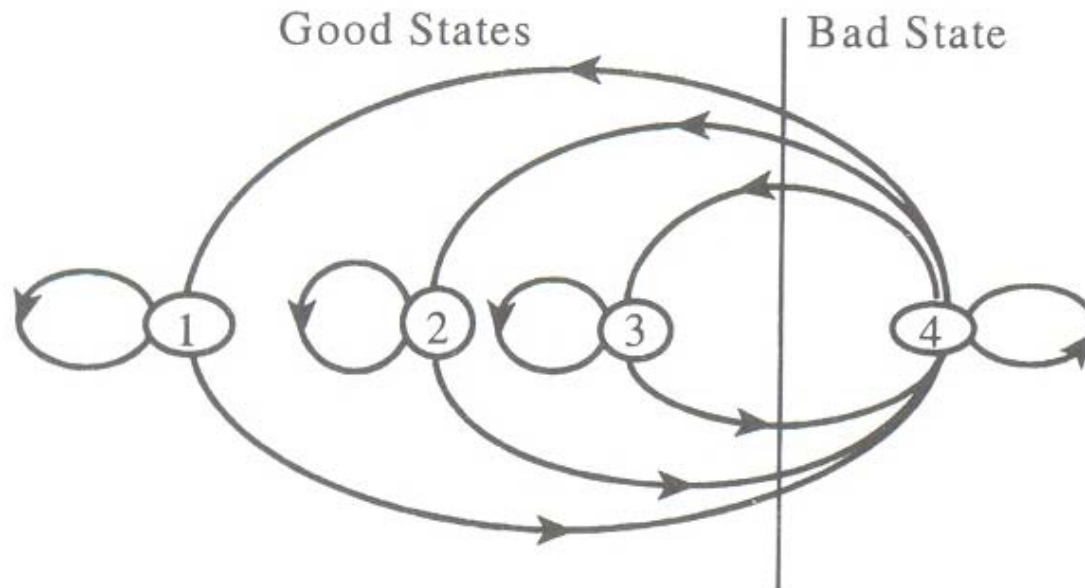
$$P(1^{m-1} | 0) - P(1^m | 0) = \sum_{i=k+1}^N f_i \lambda_i^{m-1} (1 - \lambda_i)$$

O modelo de Fritchman pode ser interpretado como um processo de Markov com uma matriz de probabilidades de transição de estado:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{GG} & A_{GB} \\ A_{BG} & \Lambda_{BB} \end{bmatrix} \quad \Lambda_{GG} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} \quad \Lambda_{BB} = \begin{bmatrix} \lambda_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Note que não há transições dentro do conjunto de  $N-k$  estados bons e não há transições dentro do conjunto de estados ruins.

## Modelo de estado de erro único:



$$P(0^m | 1) = \sum_{k=1}^{N-1} \left[ \frac{a_{Nk} (a_{kk})^m}{a_{kk}} \right], \quad m \geq 1$$

Note que os  $2(N - 1)$  parâmetros do modelo são especificados unicamente em operação livre de erro.

Um procedimento empírico é utilizado para ajustar uma mistura de  $N-1$  exponenciais para a distribuição de operação livre de erro  $P(0^m|1)$  simulada ou medida.

Exemplo:

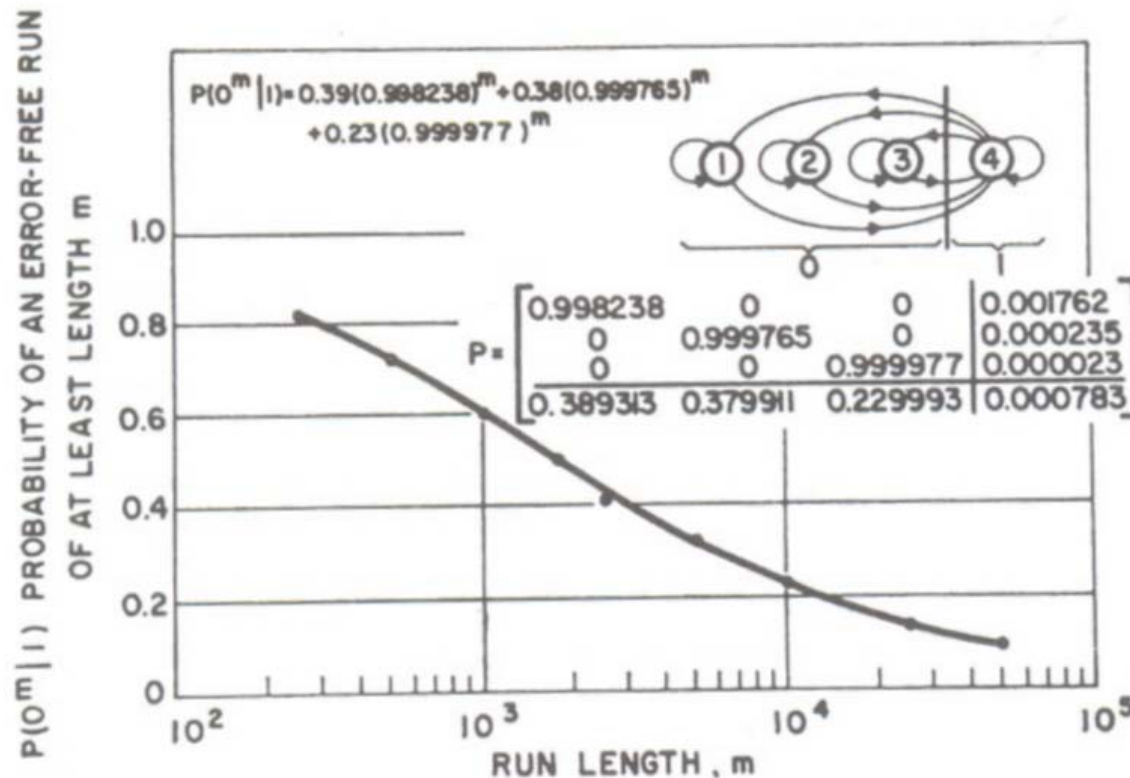


Figure 9.34. Example of model fitting to error-free run distribution (from Ref. 60, © IEEE, 1967).

O modelo de Fritchman é aplicável em canais discretos com distribuições de erro em surto simples.

Distribuições mais complexas necessitam de mais de um estado de erro no modelo, o que torna mais difícil a estimação dos parâmetros do modelo.

A alternativa é realizar a estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança utilizando técnicas iterativas.

#### 4. Estimação dos parâmetros de um modelo de Markov:

Um modelo de Markov para um canal discreto é descrito pela matriz **A** de transição de estado  $N \times N$  e pela matriz **B** de transição entrada-saída (probabilidade de erro)  $N \times M$ .

Método iterativo para estimar  $\Gamma = [\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  a partir de dado conjunto de seqüências de erro medidas ou simuladas  $\mathbf{O} = \{O_1, O_2, \dots, O_T\}$  (Baum & Welch):

**Step 0.** Start with an initial model  $\Gamma = \{A, B\}$ .

**Step 1.** With  $\Gamma = \{A, B\}$  as the model, compute the “forward variables”  $\alpha_t(i) = P[O_1, O_2, \dots, O_t, s_t = i | \Gamma]$  and the “backward variables”  $\beta_t = P[O_{t+1}, O_{t+2}, \dots, O_T | s_t = i, \Gamma]$  for  $t = 1, 2, \dots, T$  and  $i = 1, 1, 2, \dots, N$  as follows:

*Forward variables* (see Figure 9.35a for details)

Initialization:

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Induction:

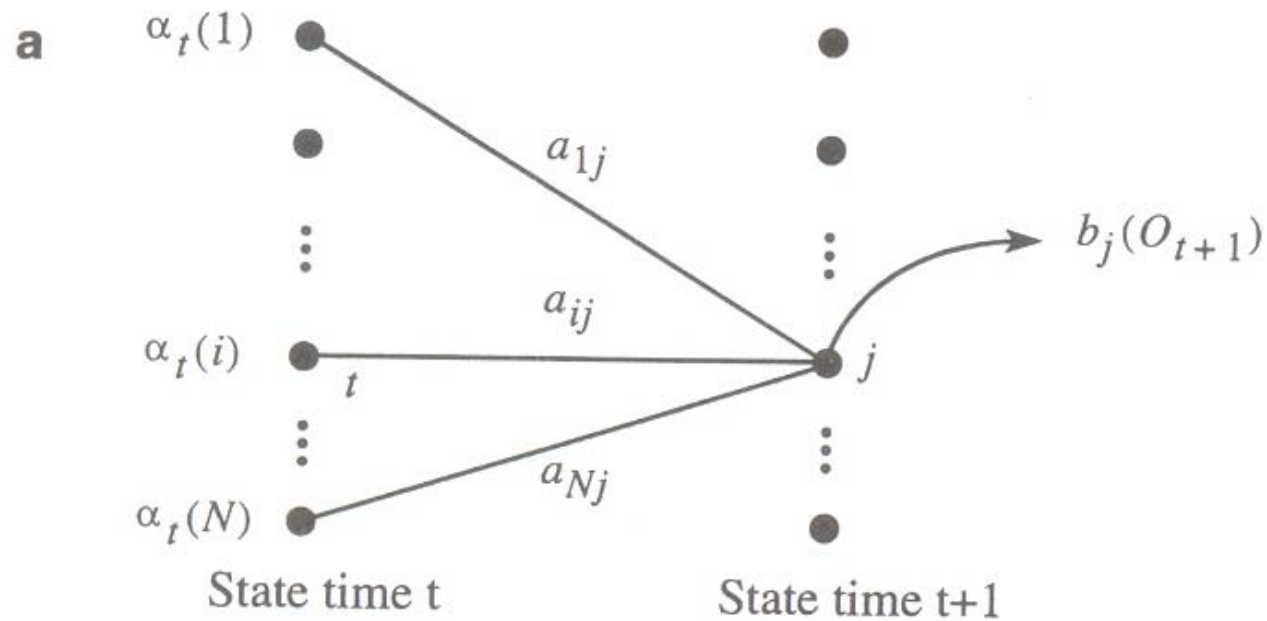
$$\alpha_{t+1}(j) = \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} \right] b_j(O_{t+1}), \quad 1 \leq t \leq T-1; 1 \leq j \leq N$$

Termination:

$$P[\bar{O} | \Gamma] = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i)$$

Note:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_T(i) = \sum_{i=1}^N P[O_1, \dots, O_T, s_T = i | \Gamma] = P[\bar{O} | \Gamma]$$



$$\alpha_t(i) = P[O_1, O_2, \dots, O_t, s_t = i | \Gamma]$$

$$\text{Induction: } \alpha_{t+1}(j) = \left[ \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij} \right] b_j(O_{t+1});$$

$$1 \leq t \leq T - 1; 1 \leq j \leq N$$

*Backward variables* (see Figure 9.35b for details)

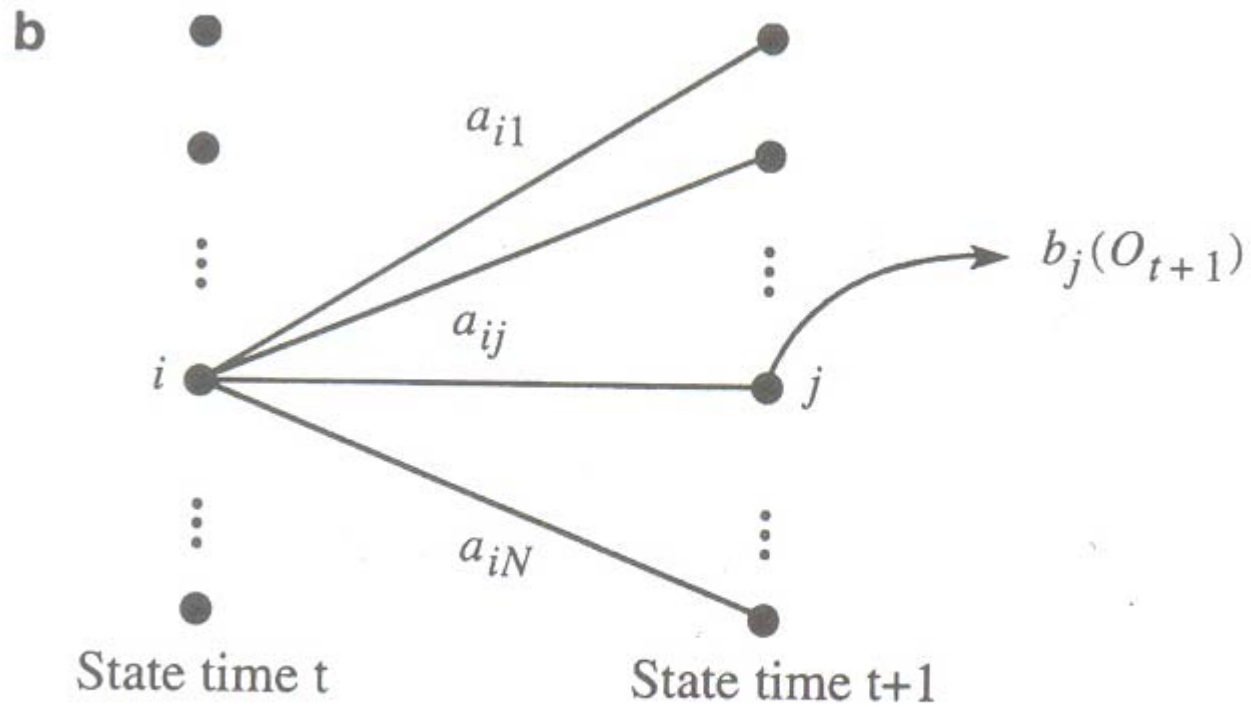
Initialization:

$$\beta_T(i) = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Induction:

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N \beta_{t+1}(j) b_j(O_{t+1}) a_{ij}, \quad 1 \leq t \leq T - 1; 1 \leq j \leq N$$





$$\beta_{t+1}(j) = P[O_{t+1}, \dots, O_T | s_{t+1} = j, \Gamma]$$

**Step 2.** Compute the state transition probabilities given  $\bar{O}$  and  $\Gamma$  and update the parameters  $A, B$  according to

$$\gamma_t(i) = P[s_t = i | \bar{O}, \Gamma] = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P[\bar{O} | \Gamma]}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\begin{aligned} \xi_t(i, j) &= P[s_t = i, s_{t+1} = j | \bar{O}, \Gamma] \\ &= \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(O_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{P[\bar{O}, \Gamma]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ij} &= \frac{\text{expected \# of transitions from } i \text{ to } j}{\text{expected \# of transitions from } i} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t(i, j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{b}_j(e_k) &= \frac{\text{expected \# of times } e_k \text{ is emitted from state } j}{\text{expected number of transitions from state } j} \\ &= \frac{\sum_{t=1, O_t=e_k}^T \gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j)} \end{aligned}$$

**Step 3.** Go back to step 1 with the new values of  $\hat{\Gamma} = \{\hat{A}, \hat{B}\}$  (i.e.,  $\hat{\Gamma} = \Gamma$  obtained in step 2, and repeat until convergence, i.e., until successive values of  $P[\bar{O} | \hat{\Gamma}]$  differ very little. (The Baum–Welch algorithm is guaranteed to converge to the maximum likelihood solution; proof is also given in Ref. 62.)

## 9.5 Metodologia para Simulação de Sistemas de Comunicações operando em Canais com Desvanecimento

