IE 708 Comunicações Móveis
Abril - Primeiro Semestre de 2013

1.0 1. A taxa de erro de bit da modulação FSK não coerente em um ambiente Gaussiano é dada por $p = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$, onde γ é a SNR. Em um canal ruidoso, em que a SNR_{dB} é de $0\,dB$, transmite-se uma mensagem de 10 bits.

0.5 a) Calcule a probabilidade de se terem 2 bits em erro na mensagem.
0.5 b) Calcule a probabilidade de apenas os dois primeiros bits estarem em erro.

2.0 2. A função densidade de probabilidade $f_T(t)$ do tempo de duração de uma chamada telefônica pode ser aproximada por uma reta, tal que ela vale $a > 0$ no tempo zero e vale zero no tempo b. Sabendo-se que a duração máxima das chamadas é de 4 minutos determine:

0.4 a) A respectiva $f_T(t)$.
0.4 b) A função distribuição de probabilidade $F_T(t)$.
0.4 c) A duração média da chamada.
0.4 d) A probabilidade de a chamada terminar em até 3 minutos.
0.4 e) A probabilidade de a chamada terminar aos 3 minutos depois de iniciada.

2.0 3. Considere o sinal Gaussiano de média nula e potência 1 mW.

0.5 a) Escreva a função densidade de probabilidade $f_S(s)$ correspondente.
1.0 b) Suponha que este sinal passe por um circuito retificador que dê um ganho de ½. Determine a função densidade de probabilidade correspondente.
0.5 c) Esboce a função densidade de probabilidade de a) e a de b).

2.5 4. Suponha que em uma célula de formato circular e de raio 1 km, a potência de um sinal de rádio, dada uma certa distância da estação rádio-base, tenha uma função densidade de probabilidade exponencial negativa de média P mW.

0.5 a) Escreva a função densidade de probabilidade dada a distância
0.5 b) Suponha que a potência média assuma os valores seguinte para certas faixas de distância: b1) 10 mW para a região central até 400 m; b2) 5 mW para a faixa de 400 m até 800 m; b3) 1 mW para a faixa de 800 m a 1000 m. Determine a função densidade de probabilidade em toda a área de cobertura.
0.5 c) Determine a potência média em toda a área circular.
0.5 d) Dado que o usuário esteja em uma região, determine a probabilidade de o sinal recebido estar acima da potência média daquela região.
0.5 e) Dado que o usuário esteja em qualquer posição da área circular, determine a probabilidade de o sinal recebido estar acima da potência média de toda a área circular.

2.5 5. Para um tráfego Poissoniano, sabe-se que o tráfego escoado pode ser obtido pelo número médio de recursos ocupados. Considere a HMM (hora de maior movimento) da ERB medida das 11:00 h às 12:00 h. Suponha que o número médio de canais ocupados em um setor da ERB de três setores seja de 12,73 e que em média todos os canais deste setor ficam ocupados por 3 min.

0.5 a) Determine o tráfego oferecido por setor.

0.5 b) Determine o tráfego bloqueado por setor.

0.5 c) Determine o número de canais por setor.

0.5 d) Supondo que, em média, cada assinante gere 4 chamadas e que a duração seja de 3 min, determine o número de assinantes que essa ERB serve.

0.5 e) Considere que, devido a um dado evento, o número de usuários tenha aumentado de 43%. Qual o valor da nova probabilidade de bloqueio?

1. FSK

$$p = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\gamma_{dB} = 10 \log \gamma$$

$$\gamma = 10^{\gamma_{dB}/10}$$

$$\gamma_{dB} = 0 \Rightarrow \gamma = 1$$

$$\therefore p = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,3$$

$N = 10$ bits

a) $$P_{eM} = \binom{N}{k} p^{k} (1-p)^{N-k}$$

$$P_{eM} = \binom{10}{2} 0,3^{2} \times 0,7^{8}$$

$$P_{eM} = \frac{10!}{8!\,2!} 0,3^{2} \times 0,7^{8}$$

$$P_{eM} = 45 \times 0,09196986 \times 0,05764801$$

$$\boxed{P_{eM} = 23,8\%}$$

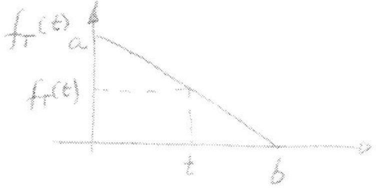
b) $$P_2 = 0,3^{2} \times 0,7^{8}$$

$$\boxed{P_2 = 5,3 \times 10^{-3}}$$

2. $f_T(t)$

$f_T(0) = a$

$f_T(b) = 0$



a) $\frac{a - f_T(t)}{t} = \frac{a}{b}$

$\frac{a}{b} t = a - f_T(t)$

$\boxed{f_T(t) = a - \frac{a}{b} t}$

$t_{max} = 4$ min

$\therefore \boxed{f_T(t) = a - \frac{a}{4} t}$

$\int_0^{b=4} \left(a - \frac{a}{4} t\right) dt = 1$

$= \left[a t - \frac{a t^2}{8}\right]_0^4 = 1$

$a4 - a2 \Rightarrow 2a = 1$

$\boxed{a = 1/2}$

$\therefore \boxed{f_T(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{8}}$

b) $F_T(t) = \int_0^t f_T(x) dx$

$F_T(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8}\right) dx$

$F_T(t) = \left(\frac{1}{2} x - \frac{x^2}{16}\right)\Big|_0^t$

$\boxed{F_T(t) = \frac{t}{2}\left(1 - \frac{t}{8}\right)}$ $0 \le t \le 4$

c) $E[T] = \int_0^4 \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\right) dt$

$E[T] = \left[\frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{24}\right]_0^4$

$E[T] = \frac{16}{4} - \frac{64}{24}$

$E[T] = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3}$

$\boxed{E[T] = 4/3}$

d) $\text{Prob}\{T \le 3\} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{8}$

$\text{Prob}\{T \le 3\} = \frac{15}{16}$

e) $\text{Prob}\{T = 3\} = 0$

3

3. SINAL GAUSSIANO S

$E[S^2] = 1mW$

a) $f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right]$

$E[S^2] = \sigma^2 = 1$

$$\boxed{f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)}$$

b) $R = |S|/2$

$R = \frac{S}{2}, \quad S > 0$

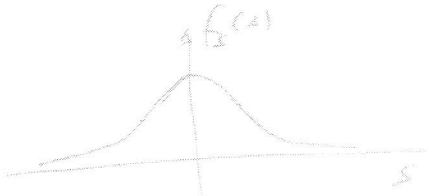
$R = -\frac{S}{2}, \quad S < 0$

$\therefore |dR| = \frac{1}{2}|ds|$

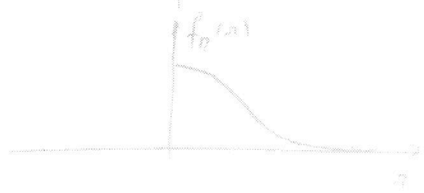
$$\therefore f_R(r) = \frac{2 \times 1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\Bigg|_{s=2r} + \frac{2\times 1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\Bigg|_{s=-2r}$$

$$\boxed{f_R(r) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-2r^2\right)}$$

c) a)



b)



4. $R = 1\,km$

a) $f_W(w|P) = \frac{1}{P}\exp\left(-\frac{w}{P}\right)$

b) $P_1 = 10\,mW \quad 0 \le r \le 400\,m$

$P_2 = 5\,mW \quad 400\,m \le r \le 800\,m$

$P_2 = 1\,mW \quad 800\,m \le r \le 1000\,m$

$$f_W(w|P_1) = \frac{1}{10}\exp\left(-\frac{w}{10}\right)$$

$$f_W(w|P_2) = \frac{1}{5}\exp\left(\frac{-w}{5}\right)$$

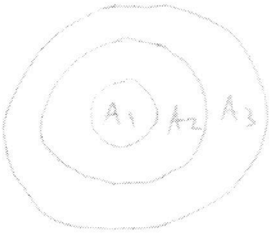
$$f_W(w|P_3) = 1\exp(-w)$$

$$f_W(w) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{P_i}\exp\left(-\frac{w}{P_i}\right) \mathrm{Prob}\{P_i = p_i\}$$

Mas $\mathrm{Prob}\{P_1 = 10\} = \mathrm{Prob}\{0 \le r \le 400\}$

$\mathrm{Prob}\{P_2 = 5\} = \mathrm{Prob}\{400 \le r \le 800\}$

$\mathrm{Prob}\{P_3 = 1\} = \mathrm{Prob}\{800 \le r \le 1000\}$



$$\mathrm{Prob}\{0 \le r \le 400\} = \frac{\pi\, 0{,}4^2}{\pi \times 1} = 0{,}16$$

$$\mathrm{Prob}\{400 \le r \le 800\} = \frac{\pi(0{,}8^2 - 0{,}4^2)}{\pi \times 1} = 0{,}48$$

$$\mathrm{Prob}\{800 \le r \le 1000\} = \frac{\pi(1 - 0{,}8^2)}{\pi \times 1} = 0{,}36$$

$$\therefore \boxed{f_W(w) = \frac{0{,}16}{10}\exp\left(-\frac{w}{10}\right) + \frac{0{,}48}{5}\exp\left(-\frac{w}{5}\right) + 0{,}36\exp(-w)}$$

c) $\bar{P} = \int_0^\infty w\, f_W(w)\, dw$

$= 10 \times 0{,}16 + 5 \times 0{,}48 + 1 \times 0{,}36$

$$\boxed{\bar{P} = 4{,}36\ mW}$$

d) $\mathrm{Prob}\{w > P \,|\, P\} =$

$$= \int_P^\infty \frac{1}{P}\exp\left(-\frac{w}{P}\right) dw$$

$$-\exp\left(\frac{w}{P}\right)\Big|_P^\infty = \exp(-1)$$

$\therefore \mathrm{Prob}\{w > P \,|\, P\} = 36{,}78\%$

e) $\mathrm{Prob}\{W > 4{,}36\} =$

$$\int_{4{,}36}^\infty f_W(w)\, dw =$$

$$= 0{,}16\exp\left(-\frac{4{,}36}{10}\right) + 0{,}48\exp\left(-\frac{4{,}36}{5}\right) + 0{,}36\exp(4{,}36)$$

$$\boxed{\mathrm{Prob}\{W > 4{,}36\} = 30{,}8\%}$$

5. HMM 11:00h – 12:00h

$E[h] = A_e = 12{,}73$

$B = \frac{3}{60} = 0{,}05$

a) $A_e = A(1-B)$

$12{,}73 = A(1-0{,}05)$

$\boxed{A = 13{,}4 \text{ erl.}}$

b) $A_b = A \times B$

$A_b = 13{,}4 \times 0{,}05$

$\boxed{A_b = 0{,}67}$

c) $A = 13{,}4$ erl. e $B = 5\%$

$\Rightarrow \boxed{N = 18}$

d) $A_{ASSINANTE} = \frac{4}{60} \times 3 = 0{,}2$ erl.

$\boxed{\# \text{ASSINANTES} = \frac{13{,}4}{0{,}2} \times 3 = 201}$

(67 / setor).

e) $\# \text{ASSINANTES} = 1{,}43 \times 67 = 95{,}01$

$A_{TOTAL} = 95{,}01 \times 0{,}2 = 19{,}162$

Da Tabela $A = 19{,}162$ e $N = 18 \Rightarrow \boxed{B = 20\%}$

1

1. FSK

$$p = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\gamma_{dB} = 10 \log \gamma$$

$$\gamma = 10^{\gamma_{dB}/10}$$

$$\gamma_{dB} = 0 \Rightarrow \gamma = 1$$

$$\therefore p = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}\right) = 0{,}3$$

$N = 10$ bits

a) $$P_{em} = \binom{N}{k} p^{k} (1-p)^{N-k}$$

$$P_{em} = \binom{10}{2} 0{,}3^2 \times 0{,}7^8$$

$$P_{em} = \frac{10!}{8!\,2!} 0{,}3^2 \times 0{,}7^8$$

$$P_{em} = 45 \times 0{,}09196986 \times 0{,}05764801$$

$$\boxed{P_{em} = 23{,}8\%}$$

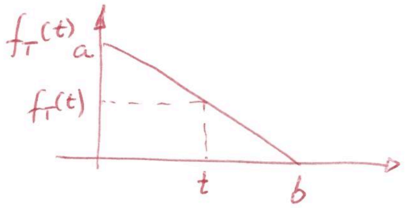
b) $$P_2 = 0{,}3^2 \times 0{,}7^8$$

$$\boxed{P_2 = 5{,}3 \times 10^{-3}}$$

2. $f_T(t)$

$f_T(0) = a$

$f_T(b) = 0$



a) $\frac{a - f_T(t)}{t} = \frac{a}{b}$

$\frac{a}{b}t = a - f_T(t)$

$$\boxed{f_T(t) = a - \frac{a}{b}t}$$

$t_{max} = 4$ min

$$\therefore \boxed{f_T(t) = a - \frac{a}{4}t}$$

$$\int_0^{b=4} \left(a - \frac{a}{4}t\right) dt = 1$$

$$= \left[at - \frac{at^2}{8}\right]_0^4 = 1$$

$a4 - a2 \Rightarrow 2a = \cancel{4}\ 1$

$$\boxed{a = 1/2}$$

$$\therefore \boxed{f_T(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{8}}$$

b) $F_T(t) = \int_0^t f_T(x)\,dx$

$$F_T(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{8}\right) dx$$

$$F_T(t) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{x^2}{16}\right)\Big|_0^t$$

$$\boxed{F_T(t) = \frac{t}{2}\left(1 - \frac{t}{8}\right)} \quad 0 \le t \le 4$$

c) $E[T] = \int_0^4 \left(\frac{t}{2} - \frac{t^2}{8}\right) dt$

$$E[T] = \left[\frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{24}\right]_0^4$$

$$E[T] = \frac{16}{4} - \frac{64}{24}$$

$$E[T] = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12-8}{3}$$

$$\boxed{E[T] = 4/3}$$

d) $\text{PROB}\{T \le 3\} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{8}$

$\text{PROB}\{T \le 3\} = \frac{15}{16}$

e) $\text{PROB}\{T = 3\} = 0$.

3. SINAL GAUSSIANO S

$E[S^2] = 1\,mW$

a) $f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{s^2}{2\sigma^2}\right]$

$E[S^2] = \sigma^2 = 1$

$$\boxed{f_S(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)}$$

b) $R = |S|/2$

$R = \frac{S}{2}, \quad S > 0$

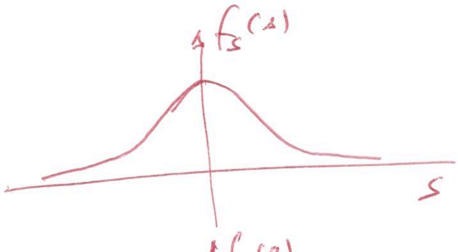
$R = -\frac{S}{2}, \quad S < 0$

$\therefore |dR| = \frac{1}{2} |ds|$

$$\therefore f_R(r) = \frac{2\times 1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\Big|_{s=2r} + \frac{2\times 1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\Big|_{s=-2r}$$

$$\boxed{f_R(r) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-2r^2\right)}$$

c) a)



b)

4. R = 1 km

a) $f_W(w|P) = \frac{1}{P}\exp\left(-\frac{w}{P}\right)$

b) $P_1 = 10\,mW \quad 0 \le r \le 400\,m$

$P_2 = 5\,mW \quad 400\,m \le r \le 800\,m$

$P_2 = 1\,mW \quad 800\,m \le r \le 1000\,m$

$f_W(w|P_1) = \frac{1}{10}\exp\left(-\frac{w}{10}\right)$

$f_W(w|P_2) = \frac{1}{5}\exp\left(\frac{-w}{5}\right)$

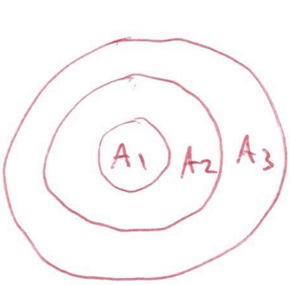
$f_W(w|P_3) = 1\exp(-w)$

$f_W(w) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{P_i}\exp\left(-\frac{w}{P_i}\right) \mathrm{Prob}\{P_i = p_i\}$

Mas $\mathrm{Prob}\{P_1 = 10\} = \mathrm{Prob}\{0 \le r \le 400\}$

$\mathrm{Prob}\{P_2 = 5\} = \mathrm{Prob}\{400 \le r \le 800\}$

$\mathrm{Prob}\{P_3 = 1\} = \mathrm{Prob}\{800 \le r \le 1000\}$



$\mathrm{Prob}\{0 \le r \le 400\} = \frac{\pi\, 0{,}4^2}{\pi \times 1} = 0{,}16$

$\mathrm{Prob}\{400 \le r \le 800\} = \frac{\pi(0{,}8^2 - 0{,}4^2)}{\pi \times 1} = 0{,}48$

$\mathrm{Prob}\{800 \le r \le 1000\} = \frac{\pi(1 - 0{,}8^2)}{\pi \times 1} = 0{,}36$

$$\therefore \boxed{f_W(w) = \frac{0{,}16}{10}\exp\left(-\frac{w}{10}\right) + \frac{0{,}48}{5}\exp\left(-\frac{w}{5}\right) + 0{,}36\exp(-w)}$$

c) $\bar{P} = \int_0^\infty w\, f_W(w)\, dw$

$= 10 \times 0{,}16 + 5 \times 0{,}48 + 1 \times 0{,}36$

$$\boxed{\bar{P} = 4{,}36\ mW}$$

d) $\mathrm{Prob}\{w > P \,|\, P\} =$

$= \int_P^\infty \frac{1}{P}\exp\left(-\frac{w}{P}\right) dw$

$-\exp\left(\frac{w}{P}\right)\Big|_P^\infty = \exp(-1)$

$\therefore \mathrm{Prob}\{w > P \,|\, P\} = 36{,}78\%$

e) $\mathrm{Prob}\{W > 4{,}36\} =$

$\int_{4{,}36}^\infty f_W(w)\, dw =$

$= 0{,}16 \exp\left(-\frac{4{,}36}{10}\right) + 0{,}48 \exp\left(-\frac{4{,}36}{5}\right)$

$+ 0{,}36\exp(-4{,}36)$

$$\therefore \boxed{\mathrm{Prob}\{w > 4{,}36\} = 30{,}8\,\%}$$

5. HMM 11:00h – 12:00h

$E[k] = A_e = 12{,}73$

$B = \frac{3}{60} = 0{,}05$

a) $A_e = A(1-B)$

$12{,}73 = A(1-0{,}05)$

$\boxed{A = 13{,}4 \text{ erl.}}$

b) $A_b = A \times B$

$A_b = 13{,}4 \times 0{,}05$

$\boxed{A_b = 0{,}67}$

c) $A = 13{,}4$ erl. e $B = 5\%$

$\Rightarrow \boxed{N = 18}$

d) $A_{ASSINANTE} = \frac{4}{60} \times 3 = 0{,}2$ erl.

$\boxed{\# \text{ASSINANTES} = \frac{13{,}4}{0{,}2} \times 3 = 201}$

(67 / setor).

e) $\# \text{ASSINANTES} = 1{,}43 \times 67 = 95{,}01$

$A_{TOTAL} = 95{,}01 \times 0{,}2 = 19{,}162$

Da Tabela $A = 19{,}162$ e $N = 18 \Rightarrow \boxed{B = 20\%}$