IE 708 Comunicações Móveis
Março 2014

3.0 1. Através de ajustes de medidas de campo, observou-se que a envoltória R do sinal de rádio recebido seguia uma densidade de Rayleigh, mas truncada até um valor máximo r_M. (Este valor máximo era ditado, por exemplo, pela saturação do receptor.)

0.75 a) Determine a PDF da envoltória recebida.

0.75 b) Determine a CDF da envoltória recebida.

0.75 c) Determine a PDF da potência recebida, escrevendo-a em função da potência máxima recebida equivalente w_M.

0.75 d) Determine a CDF da potência recebida.

3.0 2. A PDF da potência recebida em um dado ambiente de desvanecimento pode ser aproximada por $f_W(w) = \frac{2}{w_M}\left(1 - \frac{w}{w_M}\right)$, $0 \le w \le w_M$. Defina a SNR instantânea como sendo $\Gamma = \frac{W}{N}$, onde N é a potência do ruído. Seja $E[\Gamma] = \overline{\gamma} = \frac{E[W]}{N} = \frac{\overline{w}}{N}$.

0.75 a) Obtenha a SNR média $\overline{\gamma}$.

0.75 b) Escreva a PDF $f_\Gamma(\gamma)$ da SNR em termos da SNR instantânea γ e média $\overline{\gamma}$, especificando o domínio da VA.

0.75 c) A taxa de erro de bit da modulação FSK não coerente em um ambiente Gaussiano é dada por $\text{Prob}(\text{erro} \mid \gamma) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$, onde γ é a SNR instantânea. Obtenha a taxa de erro de bit no referido ambiente de desvanecimento.

0.75 d) A título de exemplo, calcule a taxa de erro de bit no ambiente Gaussiano e no ambiente de desvanecimento para uma SNR de 10 dB.

4.0 3. Em um ambiente de desvanecimento, foram feitas medidas de campo com o objetivo de se caracterizar o ambiente em termos de suas estatísticas. Os dados coletados apresentam-se na tabela seguinte.

Intervalo (mW)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
# Pontos	33639	22529	15101	10126	6784	4435	3050	2044	1371	921
PDF – Dados ( )										
PDF – Ajustada ( )										

1.0 a) Sugira uma PDF dentre aquelas conhecidas para possível ajuste aos dados.

1.0 b) Ajuste a PDF sugerida aos dados. Uma maneira de fazer isso é determinar os parâmetros da PDF-alvo a partir dos dados.

1.0 c) Determine o desvio padrão a partir dos dados e a partir da PDF ajustada.

1,0 d) Preencha as duas últimas linhas da tabela com o valor da PDF em cada ponto a partir dos dados e o valor da PDF em cada ponto a partir do ajuste. Não se esqueça de também preencher o espaço entre parênteses com a unidade correspondente (se houver).

Nota: Para todos os cálculos envolvendo os dados, como apropriado, tome os pontos do meio do intervalo.

Dados para todas as questões:

(i) A PDF da envoltória de Rayleigh é dada por $f_R(r) = \frac{2r}{\overline{w}} \exp\left(-\frac{r^2}{\overline{w}}\right)$, $r \geq 0$, onde $\overline{w}$ é a potência média do sinal.

(ii) $\int_a^b \exp(-kx)dx = \frac{\exp(-ak) - \exp(-bk)}{k}$

(iii) $\int_a^b x\exp(-kx)dx = \frac{(1+ak)\exp(-ak) - (1+bk)\exp(-bk)}{k^2}$

(iv) Dado $f_X(x) = \frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x}{a}\right)$, então $E\left[X^n\right] = a^n n!$ (n inteiro, positivo).

1. $f_R(r) = \frac{2r}{\bar{w}} \exp\left(-\frac{r^2}{\bar{w}}\right), \quad r \geq 0$

Nas medidas, $r \leq r_m$

a. $f_{R|R\leq r_m}(r|R\leq r_m) = ?$

$$f_{R|R\leq r_m}(r|R\leq r_m) = \frac{f_R(r)}{P\{R\leq r_m\}} = \frac{f_R(r)}{F_R(r_m)}$$

$$\cancel{F_R(r_m)} = F_R(r) = \int_0^r f_R(r)\,dr$$

$$\frac{r^2}{\bar{w}} = u \Rightarrow \frac{2r\,dr}{\bar{w}} = du$$

$$F_R(r) = \int \exp(-u)\,du = -\exp(-u)\Big|_0^{r^2/\bar{w}}$$

$$F_R(r) = 1 - \exp(-r^2/\bar{w})$$

$$\therefore f_{R|R\leq r_m}(R|R\leq r_m) = \frac{\frac{2r}{\bar{w}} \exp\left(-\frac{r^2}{\bar{w}}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{r_m^2}{\bar{w}}\right)}$$

$0 \leq r \leq r_m$

b. $F_{R|R\leq r_m}(r|R\leq r_m) = \int_0^r f_{R|R\leq r_m}(r|R\leq r_m)$

$$F_{R|R\leq r_m}(r|R\leq r_m) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{r^2}{\bar{w}}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{r_m^2}{\bar{w}}\right)}$$

$0 \leq r \leq r_m$

c. $W = R^2$

$dw = 2r\,dr$

$$f_{W|W\leq w_m}(w|W\leq w_m)\,dw = f_{R|R\leq r_m}(r|R\leq r_m)\,dr\Big|_{w=}$$

$$f_{W|W\leq w_m}(w|W\leq w_m) = \frac{\frac{1}{\bar{w}} \exp\left(-\frac{w}{\bar{w}}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{w_m}{\bar{w}}\right)}$$

$0 \leq w \leq w_m$

d. $F_{W|W\leq w_m}(w|W\leq w_m) = \int_0^w f_{W|W\leq w_m}(x|W\leq w_m)\,dx$

$$F_{W|W\leq w_m}(w|W\leq w_m) = \frac{1 - \exp(-w/\bar{w})}{1 - \exp(-w_m/\bar{w})}$$

$0 \leq w \leq w_m$

2. $f_W(w) = \frac{2}{w_m}\left(1 - \frac{w}{w_m}\right),$

$\Gamma = W/N \;;\; E[\Gamma] = E[W]/N$

a. $E[W] = \int_0^{w_m} \frac{2w}{w_m}\left(1 - \frac{w}{w_m}\right) dw$

$$\boxed{E[W] = w_m/3}$$

$E[\Gamma] = \frac{E[W]}{N} = \frac{w_m/3}{N} = \bar{\gamma}$

$$\boxed{E[\Gamma] = \bar{\gamma} = \frac{w_m}{3N}}$$

b. $f_\Gamma(\gamma)\, d\gamma = f_W(w)\, dw \Big|_{w = N\gamma}$

$d\gamma = dw/N$

$f_\Gamma(\gamma) = \frac{2}{w_m/N}\left(1 - \frac{\gamma}{w_m/N}\right)$

Mas $w_m = 3N\bar{\gamma}$

$$\boxed{f_\Gamma(\gamma) = \frac{2}{3\bar{\gamma}}\left(1 - \frac{\gamma}{3\bar{\gamma}}\right) \qquad 0 \le \gamma \le 3\bar{\gamma}}$$

c. $\text{Prob}\{\text{erro}|\gamma\} = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$

$\text{Prob}\{\text{erro}\} = \int_0^{3\bar{\gamma}} \text{Prob}\{\text{erro}|\gamma\}\, f_\Gamma(\gamma)\, d\gamma$

$= \frac{2}{3\bar{\gamma}}\left[\int_0^{3\bar{\gamma}} \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right) d\gamma - \frac{1}{3\bar{\gamma}}\int_0^{3\bar{\gamma}} \frac{\gamma}{2}\exp\left(\frac{-\gamma}{2}\right) d\gamma\right]$

$$\boxed{\text{Prob}\{\text{erro}\} = -\frac{4 - 6\bar{\gamma} - 4\exp(-3\bar{\gamma}/2)}{9\bar{\gamma}^2}}$$

d. $\gamma_{dB} = 10 \Rightarrow \gamma = 10$

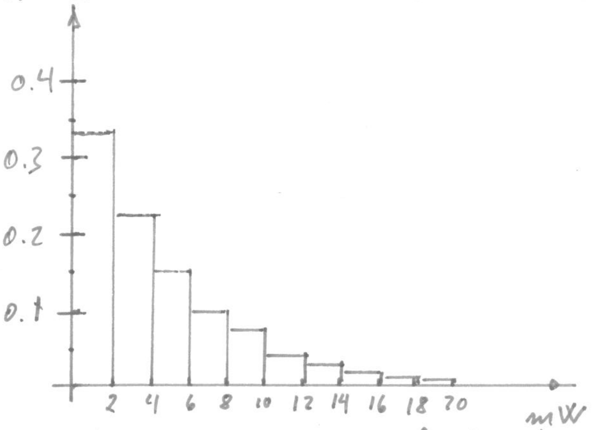
$$\boxed{\text{Prob}\{\text{erro Gaussiano}\} = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{10}{2}\right) = 3{,}37 \times 10^{-3}}$$

$\bar{\gamma}_{dB} = 10 \Rightarrow \bar{\gamma} = 10$

$$\boxed{\text{Prob}\{\text{erro Fading}\} = 6{,}2 \times 10^{-2}}$$

3.

a. Pela tabela, o total de pontos coletados é 10^5. É possível esboçar um histograma com a freqüência de ocorrência dos valores.



Sugestão: Exponencial Negativa.

b. $f_W(w) = \frac{1}{\bar{w}} \exp\left(-\frac{w}{\bar{w}}\right)$

O único parâmetro dessa PDF é $\bar{w}$, a potência média.

$$\bar{w} = 10^{-5}(1\times 33639 + 3\times 22529 + 5\times 15101 + 7\times 10126 + 9\times 6784 + 11\times 4435 + 13\times 3050 + 15\times 2044 + 17\times 1371 + 19\times 921)$$

$\boxed{\bar{w} = 4{,}6857}$ $\boxed{f_W(w) = \frac{1}{4.6857} \exp\left(-\frac{w}{4.6857}\right)}$

c. A partir da PDF

Sabe-se que $\sqrt{VAR[W]} = E[W]$

$\therefore \boxed{\sqrt{VAR[W]} = 4.6857}$

A partir dos dados

$VAR[W] = E[W^2] - E^2[W]$

$$E[W^2] = 10^{-5}(1^2\times 33639 + 3^2\times 22529 + 5^2\times 15101 + 7^2\times 10126 + 9^2\times 6784 + 11^2\times 4435 + 13^2\times 3050 + 15^2\times 2044 + 17^2\times 1371 + 19^2\times 921)$$

$E[W^2] = 39.00288$

$VAR[W] = 39.00288 - 4.6857^2$

$VAR[W] = 17.04709551$

$\boxed{\sqrt{VAR[W]} = 4.128812845}$

d. $f_W(w) = \frac{dF_W(w)}{dw}$

$$\simeq \frac{F_X(w+\Delta w/2) - F_X(w-\Delta w/2)}{\Delta w}$$

$$= \frac{\text{freqüência de ocorrência}}{\Delta w}$$

Intervalo (mW)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
No. Pontos	33639	22529	15101	10126	6784	4435	3050	2044	1371	921
PDF - Dados	0.168195	0.112645	0.075505	0.05063	0.03392	0.02217	0.01525	10.22×10^{-3}	6.9×10^{-3}	4.6×10^{-3}
PDF - Ajustada	0.17240	0.11251	0.07342	0.04791	0.03126	0.02040	0.01331	8.69×10^{-3}	5.67×10^{-3}	3.7×10^{-3}

10^{-3}

$\therefore \hat{f}_W(w_1) = 0.33639/2 = 0.16819$

$\hat{f}_W(w_2) = 0.22529/2 = 0.112645$

$\vdots$

$\hat{f}_W(w_{10}) = 0.00921/2 = 0.004605$

$$f_W(w)\ \text{ajustada} = \frac{1}{4.6857} \exp\left(-\frac{w}{4.6857}\right)$$