IE 708 – COMUNICAÇÕES MÓVEIS
Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação – UNICAMP
Abril 2015

1. Considere um sistema de serviço de rádio com cobertura omnidirecional de alcance R e usuários uniformemente distribuídos em sua área. Para um sistema de coordenadas (r,θ) e área circular com centro em $(x,y) = (0,0)$, determine:

   a. A função densidade de probabilidade $f_{R,\Theta}(r,\theta)$ da posição do usuário.
   b. A função distribuição de probabilidade $F_{R,\Theta}(r,\theta)$ da posição do usuário.
   c. As densidades e as distribuições marginais.
   d. A relação de dependência entre as variáveis R e Θ.
   e. As densidades condicionais.
   f. A probabilidade de o usuário estar em $r \leq R/2$ e $\theta = \pi/2$.
   g. A probabilidade de o usuário estar em $r \leq R/2$ dado que ele está em $\theta = \pi/2$.
   h. A probabilidade de ele estar $r \leq R/2$ e $\theta \leq \pi/2$.

Obs. Se você não conseguir desenvolver o item (a), declare que não conseguiu e ele será fornecido para o prosseguimento da solução dos demais itens.

2. Sejam dois sinais elétricos representados pelas VAs X e Y, Gaussianas independentes de média zero Volt e desvios-padrão σ_X e σ_Y. Considere X e Y como entradas de um somador de saída Z e de um subtrator de saída W. Determine:

   a. As potências de X e de Y.
   b: Os valores médios de Z e de W.
   c. As potências de Z e de W.
   d. O fator de correlação entre Z e W.
   e. A condição para que Z e W sejam descorrelacionados.
   f. A condição para que Z e W sejam ortogonais.

3. Seja X um sinal com distribuição Gaussiana de média 1 volt e potência 2 watts. Este sinal passa por um retificador de onda completa com ganho 3 fornecendo uma saída Y.

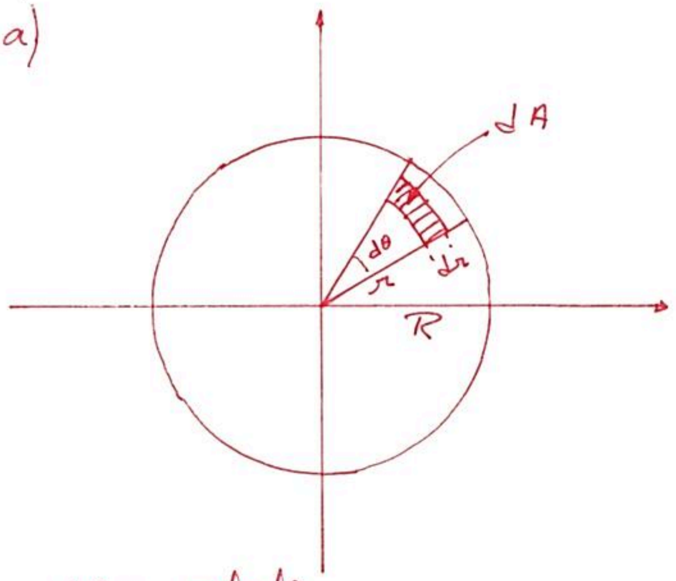
   a. Escreva a função densidade de probabilidade de X.
   b. Escreva a função densidade de probabilidade de Y.

4. Uma Estação Rádio Base (ERB) serve uma população de 670 usuários. Em média, cada usuário faz duas ligações de um minuto a cada 100 minutos. Percebeu-se que o número médio de canais ocupados era de 12,73.

   a. Determine a probabilidade de bloqueio da ERB.
   b. Determine o número de canais da ERB.
   c. Tendo em vista a referida taxa de ocupação dos canais, resolveu-se reduzir o número de canais para o valor superior imediato. O que ocorreu com a probabilidade de bloqueio? Quantifique.
   d. Para retornar ao nível de bloqueio inicial, quantos usuários a ERB deveria servir?

Obs. O número médio de canais ocupados é equivalente ao tráfego escoado.

1. a)



$dA = r\,dr\,d\theta$

$$dF_{R,\theta}(r,\theta) = \frac{r\,dr\,d\theta}{\pi R^2}$$

$$f_{R,\theta}(r,\theta) = \frac{\partial^2 F_{R,\theta}(r,\theta)}{\partial r\,\partial\theta}$$

$$\therefore \boxed{f_{R,\theta}(r,\theta) = \frac{r}{\pi R^2}}$$

b) $$F_{R,\theta}(r,\theta) = \int_0^r \int_0^\theta \frac{x}{\pi R^2}\,dx\,d\phi$$

$$\boxed{F_{R,\theta}(r,\theta) = \frac{r^2\theta}{2\pi R^2}}$$

c) $$f_R(r) = \int_0^{2\pi} f_{R,\theta}(r,\theta)\,d\theta$$

$$\boxed{f_R(r) = \frac{2r}{R^2}}$$

$$f_\theta(\theta) = \int_0^R f_{R,\theta}(r,\theta)\,dr$$

$$\boxed{f_\theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}}$$

$$\boxed{F_R(r) = \frac{r^2}{R^2}}$$

$$\boxed{F_\theta(\theta) = \frac{\theta}{2\pi}}$$

1

d. $$f_{R,\theta}(r,\theta) = f_R(r) \times f_\theta(\theta)$$

$$F_{R,\theta}(r,\theta) = F_R(r) \times F_\theta(\theta)$$

INDEPENDENTES

e. $$f_{R|\theta}(r|\theta) = f_{R,\theta}(r,\theta) / f_\theta(\theta)$$

$$\boxed{f_{R|\theta}(r|\theta) = \frac{2r}{R^2}}$$

$$f_{\theta|R}(\theta|r) = f_{R,\theta}(r,\theta) / f_R(r)$$

$$\boxed{f_{\theta|R}(\theta|r) = \frac{1}{2\pi}}$$

De fato, como R e θ são independentes, as condicionais e marginais são idênticas

f. $Prob\{r \le R/2,\ \theta = \pi/2\} = \phi$

g. $F_{R|\theta}(R/2 \mid \theta = \pi/2) = Prob\{r \le R/2\}$

$$= \int_0^{R/2} \frac{2r}{R^2}\,dr = \boxed{1/4}$$

h. $$\boxed{F_{R,\theta}(R/2, \pi/2) = 1/16}$$

2. $X \sim G(0, \sigma_X^2)$
$Y \sim G(0, \sigma_Y^2)$

a. $\boxed{\begin{aligned} E[X^2] &= \sigma_X^2 \\ E[Y^2] &= \sigma_Y^2 \end{aligned}}$

b. $Z = X+Y$
$W = X-Y$

$E[Z] = E[X+Y]$
$= E[X]+E[Y]$

$\boxed{E[Z] = 0}$

$E[W] = E[X-Y]$
$= E[X]-E[Y]$

$\boxed{E[W] = 0}$

c. $E[Z^2] = E[X+Y]$
$= E[X^2]+E[Y^2]+E[XY]$
$= E[X^2]+E[Y^2]+E[X]E[Y]$
$= E[X^2]+E[Y^2]$

$\boxed{E[Z^2] = \sigma_X^2+\sigma_Y^2}$

$E[W^2] = E[X-Y]$
$= E[X^2]+E[Y^2]-E[X]E[Y]$
$= \boxed{E[W^2] = \sigma_X^2+\sigma_Y^2}$

d. $\cancel{\rho = \dfrac{E[ZW]-E[Z]E[W]}{\sqrt{VAR[Z]\,VAR[W]}}}$

$\rho = \cancel{\dfrac{E[XY]}{\sigma_X\sigma_Y}} \; E[Z\cancel{W}]$

$\rho = \dfrac{E[ZW]-E[Z]E[W]}{\sqrt{VAR[Z]\;VAR[W]}}$

$\rho = \dfrac{E[ZW]}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}$

$E[ZW] = \cancel{E[XY]}\;E[(X+Y)(X-Y)]$
$E[ZW] = E[X^2-Y^2] = E[X^2]-E[Y^2]$
$E[ZW] = \sigma_X^2-\sigma_Y^2$

$\therefore \boxed{\rho = \dfrac{\sigma_X^2-\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}$

e. $\boxed{\rho = 0 \Rightarrow \sigma_X^2 = \sigma_Y^2}$

f. $\boxed{E[ZW] = 0 \Rightarrow \sigma_X^2 = \sigma_Y^2}$

3. $X \sim G$

$E[X] = 1$

$E[X^2] = 2$

$Y = 3|X|$

a. $f_X(x) = ?$

Uma Gaussiana de média 1 e variância σ^2 pode ser escrita como uma Gaussiana de média nula mais uma constante no valor da média

$\therefore X = Z + 1 \; ; \; Z \sim G(0, \sigma^2)$

$\therefore E[X^2] = E[Z^2 + 2Z + 1]$

$2 = \sigma^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\sigma^2 = 1}$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\boxed{f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{2}\right]}$$

b) $Y = 3|X|$

$X \geq 0 \Rightarrow Y = 3X$

$X \leq 0 \Rightarrow Y = -3X$

$X \geq 0 \; , \; Y = 3X \Rightarrow X = Y/3$

$|dy| = 3|dx|$

$X \leq 0 \; ; \; Y = -3X \Rightarrow X = -Y/3$

$|dy| = 3|dx|$

$f_Y(y) \times 3\,dx = [f_X(y/3) + f_X(-y/3)]\,dx$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,3}\left\{\exp\left[-\frac{(y-3)^2}{2 \times 3^2}\right] + \exp\left[-\frac{(y+3)^2}{2 \times 3^2}\right]\right\}}$$

4. 670 usuários

$\lambda = 2/100$

$\frac{1}{\mu} = 1$

$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$

$\therefore A = 670 \times \frac{1}{50}$

$\boxed{A = 13,4}$

$\boxed{A_e = 12,73}$

a) $A_e = A(1-B)$

$12,73 = 13,4(1-B)$

$\therefore \boxed{B = 5\%}$

b) $A = 13,4$ e $B = 5\%$

$\boxed{N = 18}$

c) $N = \lceil 12,73 \rceil = 13$

$N = 13$ e $A = 13,4$

$\boxed{B \cong 20\%}$

d) $N = 13$ e $B = 5\%$

$\Rightarrow A = 8,83$

$\# \text{usuários} = \frac{8,83}{1/50}$

$\boxed{\# \text{usuários} = 442}$