Todo $H(z)$ pode ser decomposto como uma cascata de um sistema fase mínima, $H_{min}(z)$ e um passa-tudo, $H_{all}(z)$

Sistemas fase mínima: todos os polos e zeros no interior da CRU. E daí?

$$x[n] \rightarrow \underbrace{\boxed{H(z)} \rightarrow \boxed{\frac{1}{H(z)}}}_{1} \rightarrow x[n]$$

sistema inverso

Para sistema ser estável e causal, seus polos devem estar na CRU

Hipótese: $H(z)$ é estável e causal

Polos de $1/H(z)$ são os zeros de $H(z)$

Sistema inverso é estável e causal

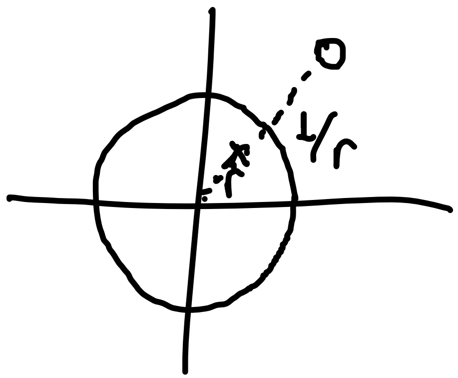
sse zeros de $H(z)$ estão dentro da CRU

sse $H(z)$ é de fase mínima

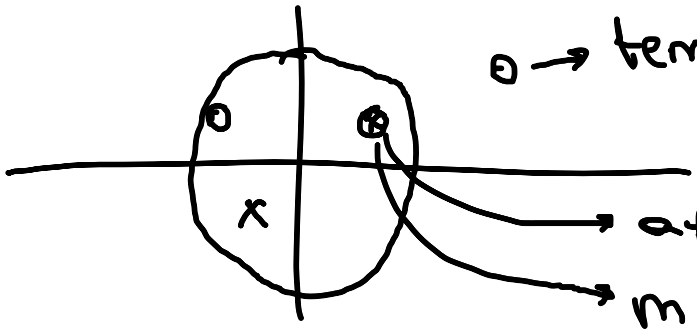
sse $1/H(z)$ é de fase mínima.

Propriedade: Considere $|H(z)|$. Dentre todos os sistemas $G(z)$ com a dada magnitude, o sistema de fase mínima possui a propriedade de concentração de energia, ou seja, a energia de sua resposta ao impulso é a mais concentrada nas primeiras amostras.

Voltando à decomposição. Lembrando passa-tudo



Vamos considerar um $H(z)$ q.q. estável e causal

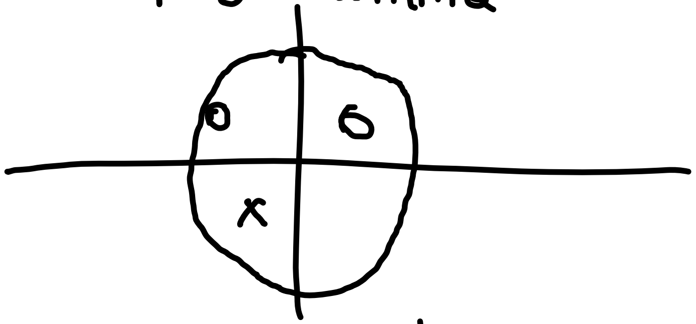


o → tem que ir para o passa-tudo

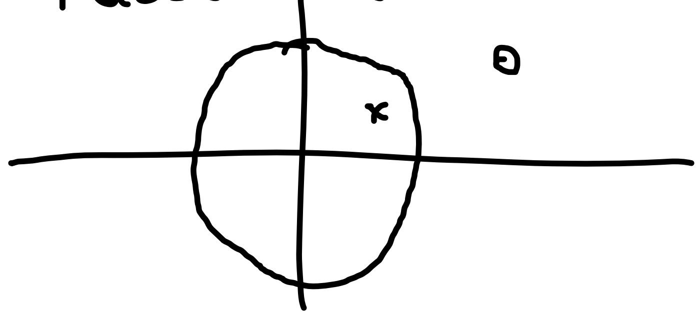
→ aparece esse polo

→ mato com um zero

Fase mínima



Passa-tudo



Esse procedimento pode ser generalizado

$\Rightarrow H(z) = H_{min}(z)\, H_{ap}(z)$

$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = H_{min}(e^{j\omega})\, H_{ap}(e^{j\omega})$

$\Rightarrow |H(e^{j\omega})| = |H_{min}(e^{j\omega})|$

$\Rightarrow$ Sempre é possível implementar uma resposta em magnitude desejada por um sistema de fase mínima

Cálculo de zeros e polos de $H(z)$ para obter $H_{min}(z)$ é numericamente instável, desejamos um procedimento mais robusto.

Dado: $|H(z)|$ Desejado: $H_{min}(z)$ com $|H_{min}(z)| = |H(z)|$

Definição: $C(z) = \log|H(z)| = \log|H_{min}(z)|$

$$\hat{X}(z) = \log H_{min}(z) = \log|H_{min}(z)| + j \arg H_{min}(z)$$

$\Rightarrow$ polos de $\hat{X}(z)$ são os polos e os zeros de $H_{min}(z)$

Lembrete: seja $v \in \mathbb{C}$, na forma polar $v = |v| e^{j\angle v}$

$\Rightarrow \log v = \log|v| + \log e^{j\angle v} = \log|v| + j\angle v$

Fato: como $H_{min}(z)$ é de fase mínima, polos de $\hat{X}(z)$ estão dentro da CRU $\Rightarrow$ $\hat{x}[n]$ é causal e estável.

Fato: $\hat{x}[n]$ é real se $h_{min}[n]$ é real.

$$\hat{X}(z) = \log H_{min}(z) \Rightarrow \frac{d}{dz}\hat{X}(z) = \frac{H'_{min}(z)}{H_{min}(z)}$$

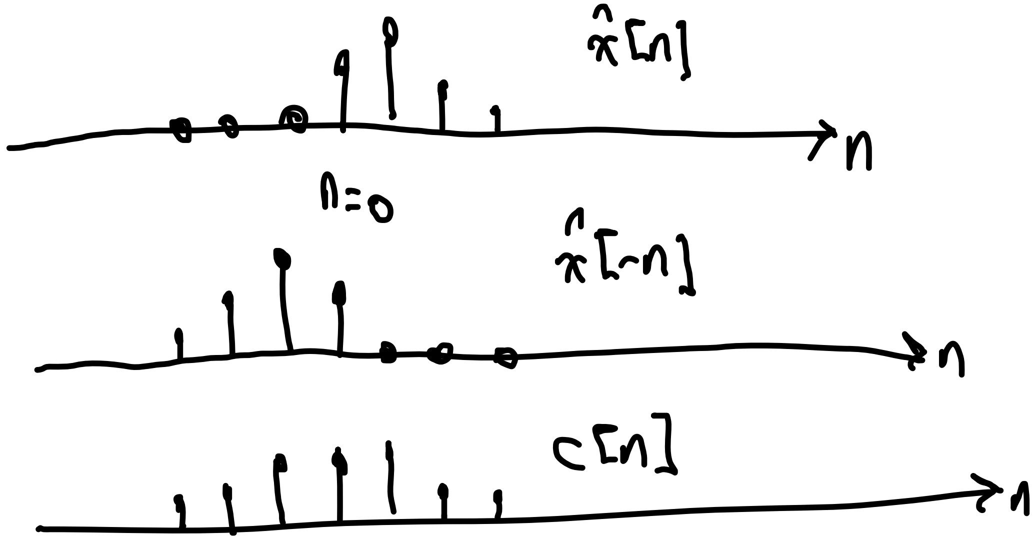
$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{-n\hat{x}[n]\} = \frac{H'_{min}(z)}{H_{min}(z)}$$

Como $H_{min}(z)$ possui as simetrias da transformada de um sinal real, vemos que $-n\hat{x}[n] \in \mathbb{R} \Rightarrow \hat{x}[n]$ é real.

Objetivo: descobrir a seq. causal e estável $\hat{x}[n]$

$$\hat{x}[n] \rightarrow \hat{X}(z) \rightarrow H_{min}(z) = e^{\hat{X}(z)}$$

Seja $c[n] = \dfrac{\hat{x}[n] + \hat{x}[-n]}{2}$



Como $\hat{x}[n]$ é causal, $\hat{x}[n] = 2u[n]c[n] - c[0]\delta[n]$

$$= 2u[n]c[n] - c[n]\delta[n] = (2u[n] - \delta[n])c[n]$$

Definição $w[n] = 2u[n] - \delta[n]$

$\Rightarrow \hat{x}[n] = w[n]c[n]$

Como $c[n] = \dfrac{\hat{x}[n] + \hat{x}[-n]}{2} \Rightarrow C(z) = \mathrm{Re}\{\hat{X}(z)\}$

$\Rightarrow C(z) = \log|H_{min}(z)|$