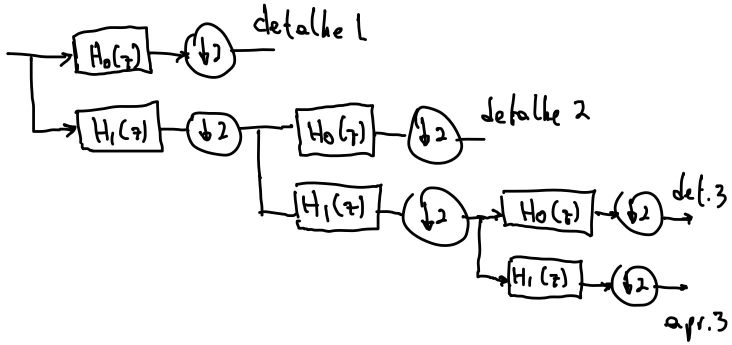
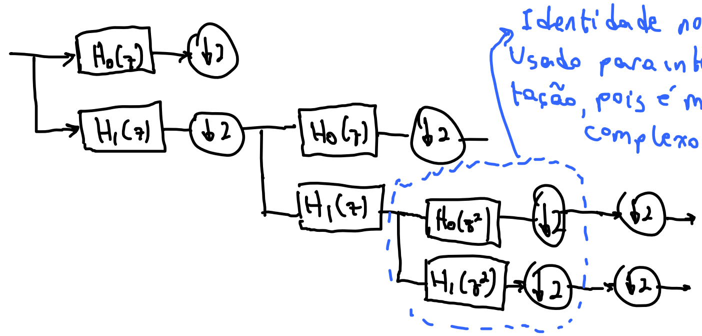
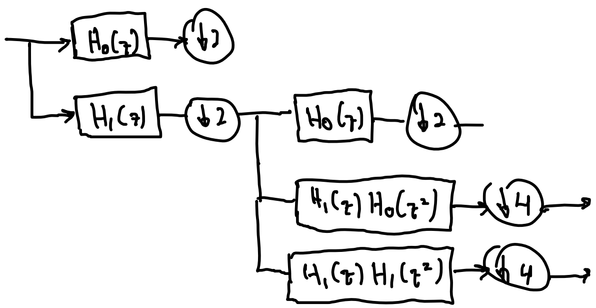
Uso das identidades nobres para reinterpretar wavelets

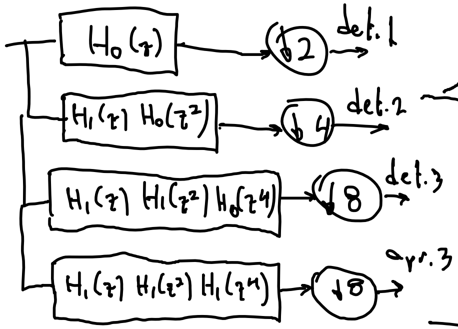


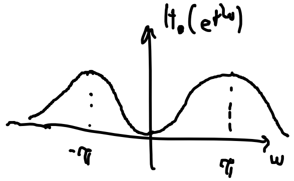


Identidade nobre. Usada para interpretação, pois é mais complexo

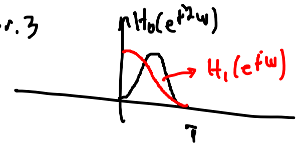


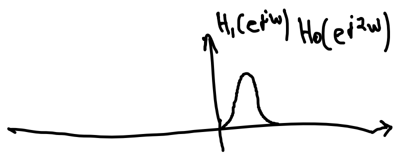
Repetindo



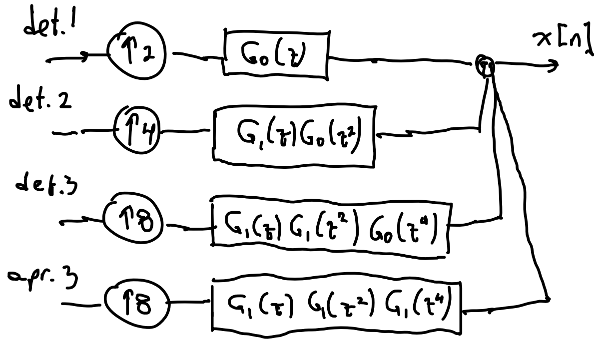


$$H_0(z^2)\Big|_{z=e^{jw}} = H_0(e^{j2w})$$

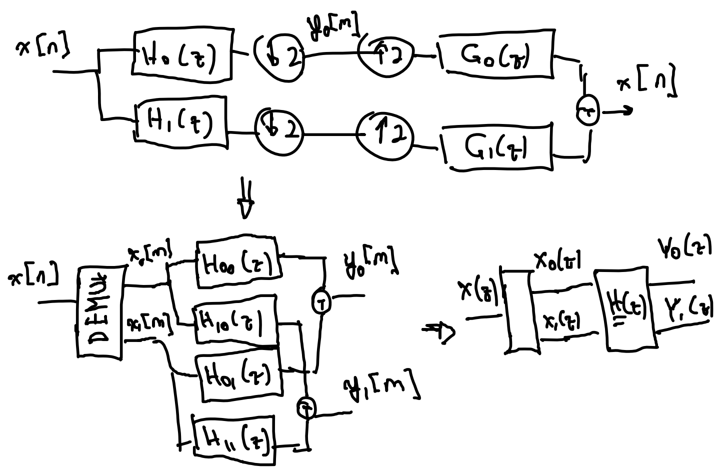




Na reconstrução podemos fazer o mesmo processo e obter

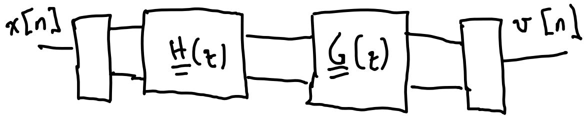


Voltando para



$$\underline{Y}(z) = \begin{bmatrix} Y_0(z) \\ Y_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(z) \\ X_1(z) \end{bmatrix}$$

Repetindo o raciocínio na reconstrução, estrutura fica assim:



Para que $v[n] = x[n-\delta]$ (reconstrução perfeita)

$$\underline{H}(z)\,\underline{G}(z) = z^{-\delta}\, I$$

Para reconstrução perfeita, não preciso especificar os 4 filtros, só os H_0 e H_1 ou G_0 e G_1

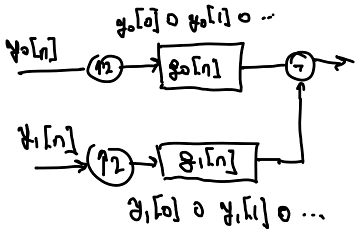
$$\underline{G}(z) = z^{-\delta}\, \underline{H}^{-1}(z) = z^{-\delta} \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\underline{G}(z) = \frac{z^{-\delta}}{H_{00}(z)H_{11}(z) - H_{10}(z)H_{01}(z)} \begin{bmatrix} H_{11}(z) & -H_{01}(z) \\ -H_{10}(z) & H_{00}(z) \end{bmatrix}$$

Verifique que $\underline{H}(z)\,\underline{G}(z) = z^{-\delta}\, I$

Propriedade: Se H_0 e H_1 são FIR, então $G(z)$ é FIR see $H_{00}(z)H_{11}(z) - H_{10}(z)H_{01}(z) = z^{-\alpha}$ para algum α. Fato: existem filtros não triviais com essa propriedade.

Voltando a wavelets



$x[n] = y_0[0]\, g_0[n] + y_0[1]\, g_0[n-2] + \cdots +$

$y_1[0]\, g_1[n] + y_1[1]\, g_1[n-2] + \cdots$

"Base" para construir $x[n]$: $g_0[n], g_0[n-2], \ldots$

$g_1[n], g_1[n-2], \ldots$

Desejo base ortogonal:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0[n-2k]\, g_0[n-2k'] = \begin{cases} 1 & k = k' \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0[n-2k]\, g_1[n-2k'] = 0$$

Se isso valer, então

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, g_0[n-2m] = y_0[m]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, g_1[n-2m] = y_1[m]$$

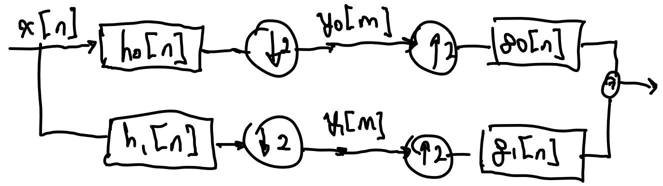
Interpretando essas contas como convolução:

Seja $h_0[n] = g_0[-n]$

$\sum x[k]\, h_0[n-k] = \sum x[k]\, g_0[k-n]$

Para $y_0[m]$, desejo calcular essa soma para $n = 2m$:

$$y_0[m] = \sum_n x[n]\, g_0[n-2m] \Rightarrow y_0[m] = w_0[2m]$$



com ortogonalidade, $h_0[n] = g_0[-n]$ e $h_1[n] = g_1[-n]$

Se $g_0[n]$ é FIR, $h_0[n]$ também é.

Impacto da ortogonalidade

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0[n-2k]\, g_0[n-2k'] = \begin{cases} 1 & k=k' \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_0[n-2]\, g_1[n-2k] = 0$$

Reescreve fazendo $n-2k=l$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} g_0[l]\, g_0[l-2m] = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

$$\sum g_0[l]\, g_1[l-2m] = 0$$

Seja $h_1[n] = g_1[-n]$

$$g_0[n] \to \boxed{h_1[n]} \to w[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0[k]\, h_1[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_0[k]\, g_1[k-n]$$

Para ortogonalidade, $w[2n]=0$

Amostras pares na saída do filtro devem ser nulas, amostras ímpares não importam.

$$W(z) = G_0(z)\, H_1(z) = G_0(z)\, G_1(z^{-1})$$

Observe que
$$W(z)+W(-z) = \cdots + w[-2]z^2 + w[-1]z + \cdots$$
$$+ \cdots + w[-2](-z)^2 + w[-1](-z) + \cdots$$

em $\frac{W(z)+W(-z)}{2}$ só aparecem os valores de $w[n]$ em instantes pares, os ímpares são anulados.

Condição de ortogonalidade 1:

$$\boxed{G_0(z)\, G_1(z^{-1}) + G_0(-z)\, G_1(-z^{-1}) = 0}$$

Analisando $\sum g_0[n]\, g_0[n-2m] = \begin{cases} 1, & m=0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$

$$g_0[n] \to \boxed{h_0[n]} \to \underbrace{\sum g_0[k]\, h_0[n-k]}_{w[n]} = \sum g_0[k]\, g_0[k-n]$$

pois $h_0[n] = g_0[-n]$

Desejo que $w[n] = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n=2k \\ qq. & n \text{ ímpar} \end{cases}$

Desejo que $\frac{W(z)+W(-z)}{2} = 1$

$$W(z) = G_0(z)\, H_0(z) = G_0(z)\, G_0(z^{-1})$$

Condição de ortogonalidade 2:

$$G_0(z)G_0(z^{-1}) + G_0(-z)G_0(-z^{-1}) = 2$$

$$G_1(z)G_1(z^{-1}) + G_1(-z)G_1(-z^{-1}) = 2$$

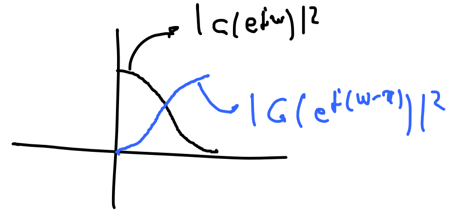
Consequência dessa condição na resposta em freq.

Fazendo $z=e^{jw}$, $z^{-1}=e^{-jw}=(e^{jw})^*$, $-z=-e^{jw}=e^{j(w-\pi)}$

Nota: $G(e^{-jw}) = G^*(e^{jw})$

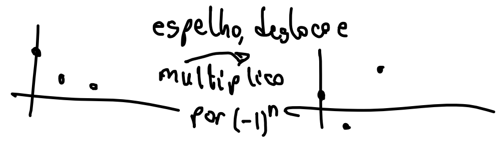
$$|G(e^{jw})|^2 + |G(e^{j(w-\pi)})|^2 = 2$$

Simetria de potência



Outra consequência da ortogonalidade:

$$g_1[n] = (-1)^n z^{-(?)} g_0[-n]$$



$$\Rightarrow |G_1(e^{jw})| = |G_0(e^{j(w-\pi)})|$$

Juntando essas condições, só preciso especificar um filtro.

Como projetar wavelet? Daubechies

Obrigatório: $|G_0(e^{jw})|^2 + |G_0(e^{j(w-\pi)})|^2 = 2$

Desejável: passa-baixas

$G_0(e^{j0}) = 1$ $\quad$ $G_0(e^{j\pi}) = 0$

Condição extra: Resposta nula a polinômios:

$$\sum n^\alpha h_0[n] = 0$$

$\alpha = 1 \Rightarrow$ reta $\Rightarrow$ Db com $N=4$ coefs.

$\alpha = 1$ e $2 \Rightarrow$ reta e parábola $\Rightarrow$ outra Db.