UNICAMP – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação
EA-619 Laboratório de Análise Linear

Experiência 6: Método da Resposta em Freqüência

4 de outubro de 2006

Sumário

1 Introdução

Quando aplica-se uma entrada senoidal a um sistema linear invariante no tempo, sua resposta em regime permanente será também senoidal de mesma freqüência, diferindo da entrada apenas em magnitude e fase. A resposta em freqüência de um sistema dinâmico é definida como a resposta em regime estacionário a uma entrada senoidal, em uma faixa de freqüência de interesse.

O método da resposta em freqüência é uma abordagem alternativa importante na análise e projeto de um sistema. Através desse método, pode-se determinar a função de transferência de um dado sistema linear, e também controlar sua faixa de passagem, de modo a minimizar os efeitos de ruídos.

1.1 Pólos e Zeros de Funções Complexas

Seja $G(s)$ uma função complexa da variável complexa $s = \sigma + j\omega$. Para cada s complexo, tem-se

$$G(s) = \mathrm{Re}[G(s)] + j\mathrm{Im}[G(s)]$$

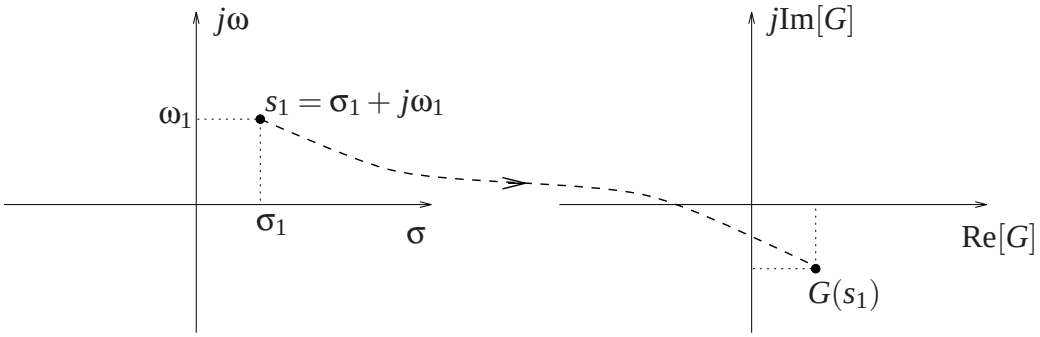


Figura 1: Função de variável complexa.

Definição 1. Uma função $G(s)$ da variável complexa s é **função analítica** em uma região do plano s se a função e todas as suas derivadas existirem na região.

Exemplo 1. A função

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

é analítica em todos os pontos do plano s, exceto em $s = 0$ e $s = -1$.

Definição 2. Se uma função $G(s)$ é analítica na vizinhança de s_i, diz-se que $G(s)$ tem um **pólo de ordem** r em s_i se o limite

$$\lim_{s \to s_i} (s - s_i)^r \, G(s)$$

tem um valor finito não nulo.

Exemplo 2. A função

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+3)^2}$$

tem um pólo simples (ordem 1) em $s = -1$ e um pólo de ordem 2 em $s = -3$.

Definição 3. Uma função $G(s)$ tem um **zero de ordem** r em s_i se $1/G(s)$ tem um pólo de ordem r em $s = s_i$. Alternativamente, s_i é um zero de $G(s)$ se $\lim_{s \to s_i} G(s) = 0$.

No exemplo anterior, a função $G(s)$ tem um zero em $s = -2$. Considerando-se os zeros no infinito, $G(s)$ tem também um zero de ordem 2 em $s = \infty$. Nesse sentido, dada uma função racional de s tem-se que o número de pólos é igual ao número de zeros.

1.2 Transformada de Laplace

Considere a função $f(t) = \sin(\omega_0 t)$, expressa como

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\left[\exp(j\omega_0 t) - \exp(-j\omega_0 t)\right] \tag{1}$$

pois, $\exp(j\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$. Calculando a transformada de Fourier, obtém-se que

$$F(\omega) = \frac{1}{2j}\left\{\int_0^\infty \exp[j(\omega_0-\omega)t]dt - \int_0^\infty \exp[-j(\omega_0+\omega)t]dt\right\}$$

Note que as integrais acima não convergem, pois as funções $\exp[j(\omega_0-\omega)t]$ e $\exp[-j(\omega_0+\omega)t]$ são periódicas e não se aproximam de nenhum limite.

Considere agora a seguinte modificação da transformada de Fourier

$$F(s) = \int_0^\infty \exp(-st)\ f(t)dt$$

onde $s = \sigma + j\omega$. Daí,

$$F(s) = \int_0^\infty \exp(-st)\sin(\omega_0 t)dt \tag{2}$$

e aplicando-se a forma (1), tem-se

$$F(s) = \frac{1}{2j}\int_0^\infty \{\exp[-(s-j\omega_0)t] - \exp[-(s+j\omega_0)t]\}\,dt\ =$$

$$= \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega_0} - \frac{1}{s+j\omega_0}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{2j\omega_0}{s^2+{\omega_0}^2}\right]$$

e portanto

$$F(s) = \frac{\omega_0}{s^2+{\omega_0}^2} \qquad \text{para} \quad \mathrm{Re}[s] = \sigma > 0 \tag{3}$$

Pode-se então definir um espectro de freqüência $F(s)$ para todo s tal que $\mathrm{Re}[s] > 0$. A Fig. 2 mostra a região de convergência[1] da integral (2) e os pólos de $F(s)$.

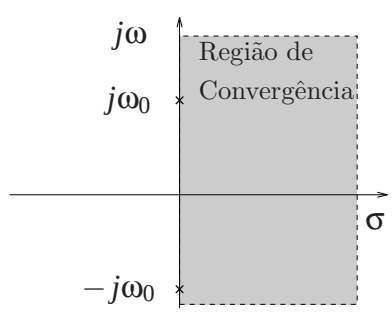


Figura 2: Plano Complexo e Região de Convergência.

Considere agora a classe de funções $f(t)$ contínuas por partes, tais que

$$\lim_{t\to\infty} \exp\ (-\sigma t)\ |\ f(t)\ | \to\ 0$$

[1] O Teorema da Extensão Analítica valida esse resultado para todo o plano s (Ver Ogata na lista de Referências).

para algum $\sigma > 0$ e $f(t) = 0$, para $t < 0$. Para essa classe de funções define-se a transformada de Laplace de $f(t)$ por

$$F(s) = \int_0^\infty \exp(-st) f(t) dt \tag{4}$$

Exemplo 3. Seja $f(t) = \exp(at)$, $t \geq 0$, a complexo. Então,

$$F(s) = \frac{1}{s-a} \qquad \text{para} \quad \mathrm{Re}[s] > \mathrm{Re}[a]$$

Pode-se mostrar que, se a função $f(t)$ tem derivada de ordem n, então a transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$ é dada por

$$s^{(n)} F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f^{(1)}(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) \tag{5}$$

onde $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$ e $f^{(k)}(0)$ é a k-ésima derivada de $f(t)$ calculada no tempo $t = 0$.

1.3 Função de Transferência

Seja o sistema linear descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t) \tag{6}$$

onde a_0, a_1, $\ldots$, a_{n-1}, b_0, b_1, $\ldots$, b_m são constantes reais e $n > m$. Além disso, supõe-se que

$$y(0) = y^{(1)}(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = u(0) = u^{(1)}(0) = \cdots = u^{(m-1)}(0) = 0$$

Tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação (6) e usando (5), obtém-se

$$\left(s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right) U(s)$$

e daí

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

A função $G(s)$ é chamada de **função de transferência** de $U(s)$ para $Y(s)$. Esquematicamente,

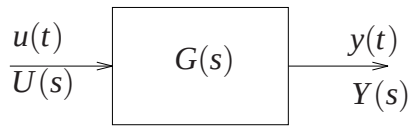


Figura 3: Função de Transferência.

Note que os pólos e zeros finitos de $G(s)$ são, respectivamente, as raízes dos polinômios $D(s)$ e $N(s)$. Observe que, a função de transferência:

a) caracteriza unicamente um sistema linear invariante no tempo;

b) é independente da entrada;

c) é obtida supondo-se que todas as condições iniciais do sistema são nulas.

2 Resposta de um Sistema Linear à Entrada Senoidal

Seja um sistema linear invariante no tempo representado pela função de transferência $G(s) = N(s)/D(s)$. Para facilitar a exposição, suponha que os pólos de $G(s)$, s_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, são distintos com parte real negativa. Pode-se então escrever

$$G(s) = \frac{N(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

Supondo que a entrada do sistema é $u(t) = A\sin(\omega t)$, pode-se calcular a resposta em regime estacionário (denotada por $y_e(t)$) para valores de t suficientemente grandes. O sistema é assintoticamente estável (parte real dos pólos negativa) e as condições iniciais são nulas. Seja $U(s)$ a transformada de Laplace de $u(t) = A\sin(\omega t)$. Então, de (3), tem-se

$$\begin{aligned} Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}U(s) = \frac{N(s)}{D(s)}\left(\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}\right) &= \\ = \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{c_1}{s-s_1} + \frac{c_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{c_n}{s-s_n} & \end{aligned} \tag{7}$$

onde a e c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ são constantes e $\bar{a}$ é o complexo conjugado de a. A transformada inversa de Laplace da equação (7) fornece (veja equação (4))

$$\begin{aligned} y(t) = a\exp(-j\omega t) + \bar{a}\exp(j\omega t) + c_1\exp(s_1 t) + c_2\exp(s_2 t) + \cdots \\ \cdots + c_n\exp(s_n t), \quad t > 0 \end{aligned}$$

Como a parte real de s é por hipótese negativa, tem-se que $\lim_{t\to\infty}\exp(s_i t) \to 0$. Se $G(s)$ tiver pólos de multiplicidade m_k, então $y(t)$ possuirá termos do tipo $t^{k_j}\exp(s_j)$, $k_j = 0, 1, \ldots, m_k - 1$. Como $\mathrm{Re}[s_j] < 0$, tem-se também que $\lim_{t\to\infty} t^{k_j}\exp(s_j t) \to 0$. Portanto,

$$y_e(t) = a\exp(-j\omega t) + \bar{a}\exp(j\omega t) \tag{8}$$

As constantes a e $\bar{a}$ podem ser calculadas a partir de (7) da seguinte maneira:

$$a = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}(s+j\omega)\bigg|_{s=-j\omega} = -\frac{AG(-j\omega)}{2j}$$

$$\bar{a} = G(s)\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}(s-j\omega)\bigg|_{s=j\omega} = +\frac{AG(j\omega)}{2j}$$

Como $G(s)$ é uma função complexa, tem-se

$$G(j\omega) = \mid G(j\omega) \mid \exp\left[j\phi(\omega)\right]$$

onde

$$\phi(\omega) = \arctan\left[\frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)}\right]$$

Analogamente,

$$G(-j\omega) = \mid G(-j\omega) \mid \exp\left[-j\phi(\omega)\right] \; = \mid G(j\omega) \mid \exp\left[-j\phi(\omega)\right]$$

e de (8), obtém-se

$$\begin{aligned} y_e(t) &= A \mid G(j\omega) \mid \frac{\exp\left[j\left(\omega t+\phi(\omega)\right)\right]-\exp\left[-j\left(\omega t+\phi(\omega)\right)\right]}{2j} \\ &= \; A \mid G(j\omega) \mid \sin\left(\omega t+\phi(\omega)\right) = B\sin\left(\omega t+\phi(\omega)\right) \end{aligned}$$

onde $B = A \mid G(j\omega) \mid$.

Concluíndo, um sistema linear, assintoticamente estável, invariante no tempo e sujeito a uma entrada senoidal, possui em regime estacionário uma saída senoidal com a mesma freqüência de entrada, porém com amplitude e ângulo de fase em geral distintos. Portanto, para uma entrada senoidal:

$$\begin{aligned} \mid G(j\omega) \mid = \left|\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}\right| &= \text{Relação de amplitude entre a saída senoidal e a entrada senoidal.} \\ \phi(j\omega) &= \text{Defasagem da saída senoidal em relação à entrada senoidal.} \end{aligned}$$

A saída senoidal em regime estacionário pode ser obtida a partir das características da entrada senoidal (amplitude e freqüência) e das características de $G(j\omega)$ (amplitude e fase). Alternativamente, a função de transferência de um sistema linear pode ser identificada levantando-se os gráficos da relação de amplitudes e ângulos de fase em função da freqüência.

Exemplo 4. Considere o circuito RC na Fig. 4. Tem-se que

$$v_1(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt \quad ; \quad v_2(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

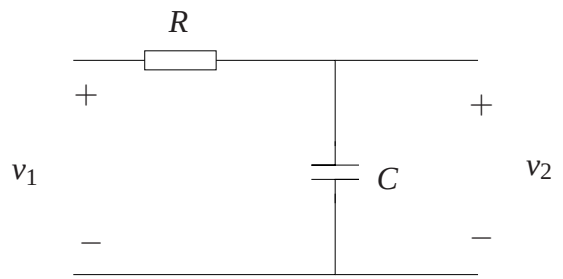


Figura 4: Circuito RC série.

e tomando a transformada de Laplace das equações acima, obtém-se

$$V_1(s) = \left(R + \frac{1}{sC}\right) I(s) \quad ; \quad V_2(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

Portanto

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{sRC+1}$$

que é a função de transferência do sistema. Daí,

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)+1} \quad , \quad \omega_1 = \frac{1}{RC} \tag{9}$$

e

$$|\, G(j\omega)\, | = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 1}} \quad , \quad \phi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \tag{10}$$

Portanto, para uma entrada $v_1(t) = A\sin(\omega t)$,

$$v_2(t) = \frac{A}{\sqrt{\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + 1}} \sin\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)\right)$$

De (9), tem-se que $G(j\omega) = a - jb$, onde

$$a = \frac{1}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \quad , \quad b = \frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)}{1+\left(\dfrac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

e pode-se verificar que $a^2 + b^2 = a$, e daí $(a - 1/2)^2 + b^2 = 1/4$. Portanto, o lugar geométrico das partes real e imaginária de $G(j\omega)$ é um círculo de raio $1/2$ e centro em $(1/2, 0)$. De (10), tem-se que:

a) para $\omega = 0$, $| G(j\omega) | = 1$ e $\phi(\omega) = 0$.

b) para $\omega = \omega_1$, $| G(j\omega) | = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $\phi(\omega) = -45^o$.

c) para $\omega \to \infty$, $| G(j\omega) | \to 0$ e $\phi(\omega) = -90^o$.

A Fig. 5 mostra o *gráfico polar* de $G(j\omega)$ em função da freqüência ω.

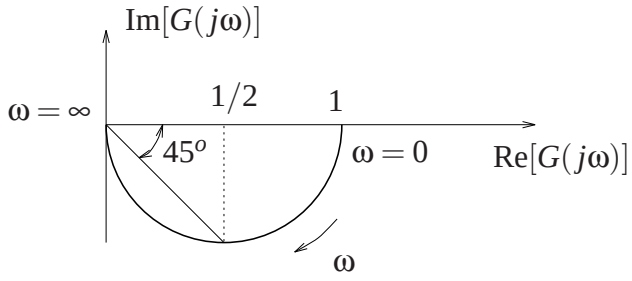


Figura 5: Gráfico polar de $G(j\omega)$.

O gráfico polar da Fig. 5 caracteriza um sistema linear cuja função de transferência é dada por

$$G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

onde o parâmetro τ pode ser identificado da seguinte forma: injeta-se um sinal senoidal na entrada, com freqüência variável. A freqüência correspondente a uma saída senoidal defasada de 45° da entrada é igual a $1/\tau$. Alternativamente, a freqüência $1/\tau$ corresponde a uma relação de amplitudes entre saída e entrada de $1/\sqrt{2}$.

2.1 Diagramas de Bode

São gráficos logarítmicos usados na determinação da resposta em freqüência de um sistema. Esses gráficos podem também ser utilizados na identificação da função de transferência de um sistema linear.

Seja $G(s)$ a função de transferência de um sistema linear. Então,

$$G(j\omega) = | G(\omega) | \exp[j\phi(\omega)]$$

é a função de transferência no domínio da freqüência. Define-se

$$\text{Ganho Logarítmico} \quad = \quad 20 \log \; | G(j\omega) |$$

com unidade em decibéis (dB).

Os Diagramas de Bode consistem de um gráfico do ganho logarítmico em dB (Diagrama de Magnitude), e de um gráfico da fase $\phi(\omega)$ (Diagrama de Fase), ambos em função da freqüência ω.

Exemplo 5. A função de transferência do circuito RC da Fig. 4 é

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \quad , \quad \tau = RC$$

e seu ganho logarítmico é dado por

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\right) = -10\log\left(1+(\omega\tau)^2\right)$$

Para freqüências bem pequenas, isto é, $\omega \ll 1/\tau$, tem-se

$$20\log|G(j\omega)| = -10\log(1) = 0 \text{ dB}$$

Para freqüências bem grandes, isto é, $\omega \gg 1/\tau$, tem-se

$$20\log|G(j\omega)| = -20\log(\omega\tau)$$

Quando $\omega = 1/\tau$ (chamada de *freqüência de corte*),

$$20\log|G(j\omega)| = -10\log(2) \approx -3 \text{ dB}$$

O ângulo de fase do sistema é dado por

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

Considerando-se agora uma escala logarítmica de freqüência, em lugar da escala linear, tem-se para $\omega\tau \gg 1$

$$20\log|G(j\omega)| = -20\log(\omega\tau)$$

e portanto, se o eixo horizontal é $\log\omega$, a curva assintótica para $\omega \gg 1/\tau$ é uma reta, como mostrado na Fig. 6.

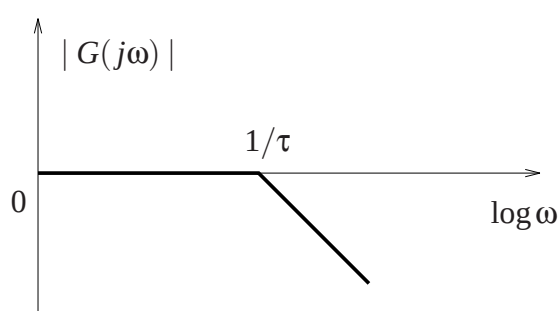


Figura 6: Diagrama de Magnitude.

Note que uma variação unitária em $\log\omega$ corresponde a uma variação de -20 dB em ganho. Mas uma variação unitária em $\log\omega$ corresponde a uma década de variação em ω, ou seja, de 1 a 10, de 10 a 100, etc. Diz-se então que a inclinação da reta é de -20 dB/década.

Ao invés de décadas, algumas vezes a unidade *oitava* é usada para representar a separação entre duas freqüências. As freqüências ω_1 e ω_2 são separadas por uma oitava se $\omega_1/\omega_2 = 2$. Nesse caso,

$$20\log|\,G(j\omega_2)\,| - 20\log|\,G(\omega_1)\,| = 20\log\left(\frac{\omega_2\tau}{\omega_1\tau}\right) = -20\log(2) = -6 \text{ dB}$$

e portanto a inclinação da reta é de -6 dB/oitava.

Seja agora $G(j\omega)$ a função de transferência no domínio da freqüência de um sistema linear. Então, $G(j\omega)$ pode ser escrita na forma

$$G(j\omega) = \frac{k_b \prod_{i=1}^{Q}(1+j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^{M}(1+j\omega\tau_m)\prod_{k=1}^{R}\left[1+(2\xi_k/\omega_{nk})\,j\omega+(j\omega/\omega_{nk})^2\right]}$$

A função de transferência anterior inclui Q zeros, N pólos na origem, M pólos reais e R pares de pólos complexos conjugados. Tomando o logaritmo da magnitude de $G(j\omega)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} 20\ \log|\,G(j\omega)\,| &= 20\ \log(k_b) + 20\ \sum_{i=1}^{Q}\log|\,1+j\omega\tau_i\,| - 20\ \log|\,(j\omega)^N\,| \\ &\quad - 20\ \log\sum_{m=1}^{M}|\,1+j\omega\tau_m\,| - 20\ \sum_{k=1}^{R}\log\left|1+\left(\frac{2\xi_k}{\omega_{nk}}j\omega\right)+\left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}}\right)^2\right| \end{aligned}$$

e portanto o gráfico do ganho logarítmico pode ser obtido adicionando-se os gráficos devidos a cada um dos fatores.

O ângulo de fase é descrito como

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^{Q}\arctan(\omega\tau_i) - N\times 90^o - \sum_{m=1}^{M}\arctan(\omega\tau_m) - \sum_{k=1}^{R}\arctan\left(\frac{2\xi_k\omega_{nk}\omega}{\omega_{nk}^2-\omega^2}\right)$$

que corresponde à soma dos ângulos de fase devidos a cada fator individual.

As características assintóticas do Diagrama de Bode de cada um dos fatores distintos que ocorrem numa função de transferência são descritas a seguir.

a) Ganho constante k_b

Ganho Logarítmico $= 20\ \log(k_b) =$ constante em dB

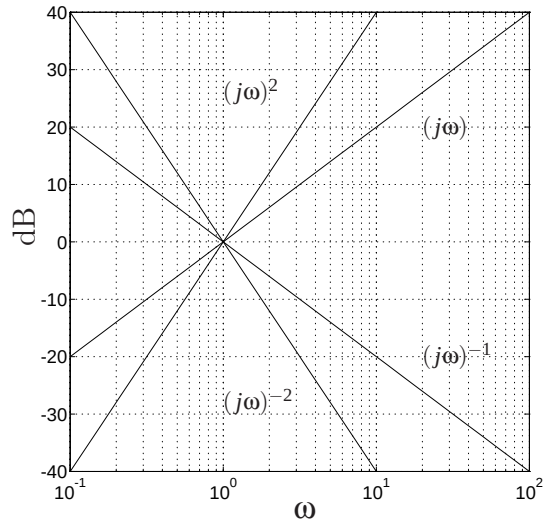
Ângulo de fase $= 0$

b) Zeros ou Pólos na origem: $(j\omega)^{\pm N}$ (Veja figuras 7.a e 7.b)

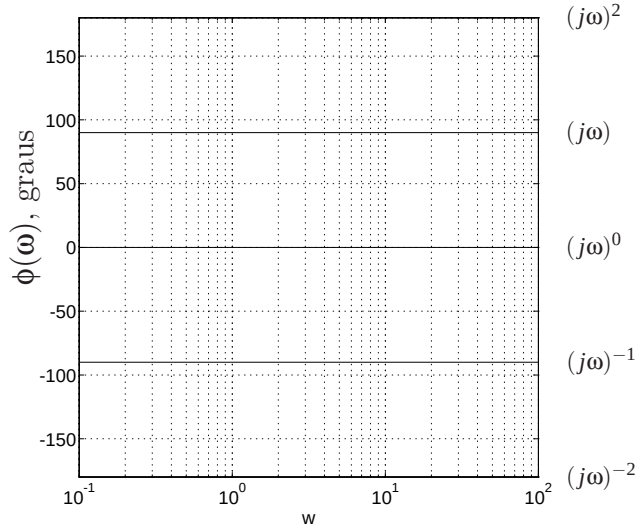
Ganho Logarítmico $= 20\ \log\ |\,(j\omega)^{\pm N}\,| = \pm\ 20N \log\ |\,j\omega\,|$

Inclinação das curvas de magnitude $= \pm 20N$ dB/década

Ângulo de fase $= \pm 90N$



(a)



(b)

Figura 7: Diagrama de Magnitude (a) e de Fase (b) para $(j\omega)^{\pm N}$.

c) Zeros ou Pólos Reais: $(1+j\omega\tau)^{\pm 1}$ (Veja Fig. 8)

Ganho Logarítmico $= 20\ \log\ |\,(1+j\omega\tau)^{\pm 1}\,| = \pm 10 \log\left(1+\omega^2\tau^2\right)$

Assíntota para $\omega \ll 1/\tau$ é igual a 0 dB

Assíntota para $\omega \gg 1/\tau$ é igual a $\pm 20 \log \omega\tau$, com inclinação de ± 20 dB/década.

A interseção das assíntotas ocorre quando $-20\log(\omega\tau) = 0$ dB, ou seja, ocorre na freqüência de corte $\omega = 1/\tau$.

Ganho Logarítmico em $\omega = 1/\tau$ é igual a ± 3 dB

Ângulo de fase $= \pm \arctan(\omega\tau)$

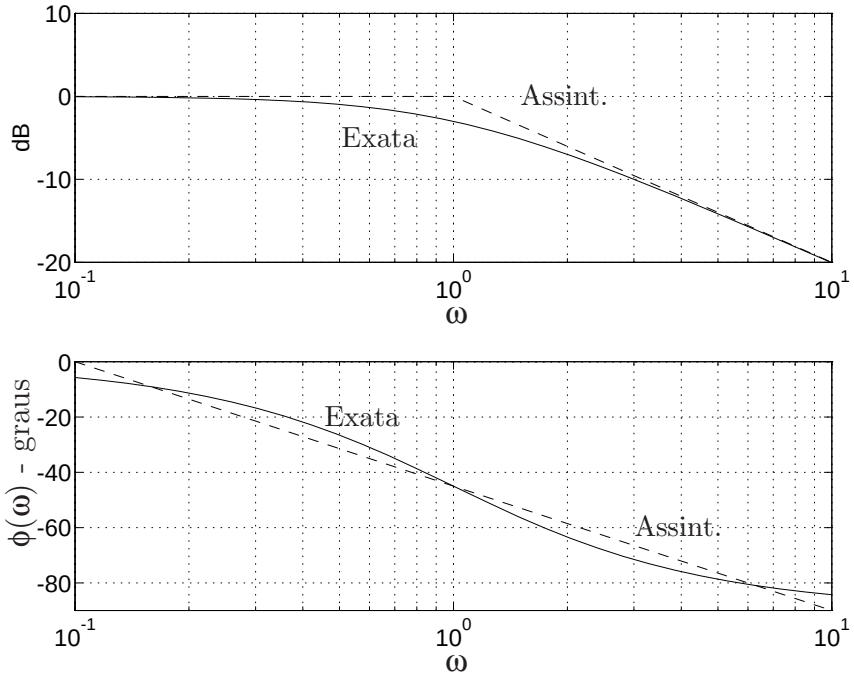


Figura 8: Diagramas de Bode para $(1 + j\omega\tau)^{-1}$, $\tau = 1$.

d) Zeros ou Pólos Conjugados: $\left[1 + (2\xi/\omega_n) j\omega + (j\omega/\omega_n)^2\right]^{\pm 1}$

O fator quadrático para um par de zeros ou pólos complexos conjugados pode ser escrito na forma $\left[1 + j2\xi u - u^2\right]^{\pm 1}$, onde $u = \omega/\omega_n$.

Ganho Logarítmico $= \pm 10 \left[\log\left((1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2\right)\right]$

Ângulo de fase $= \pm \arctan\left(\dfrac{2\xi u}{1-u^2}\right)$

Para $u \ll 1$ ($u = \omega/\omega_n$; $\omega \ll \omega_n$)

Assíntota $= 0$ dB, Ângulo de fase $\to 0$

Para $u \gg 1$

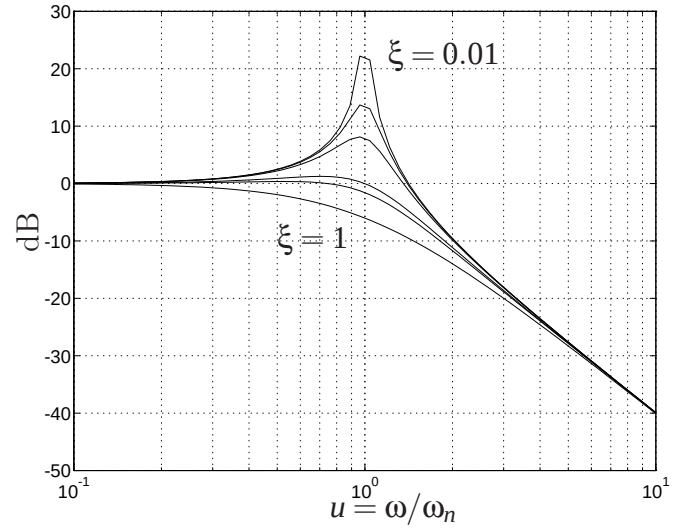
Assíntota $= \pm 10 \log u^4 = \pm 40 \log u$

Inclinação da assíntota = ± 40 dB/década

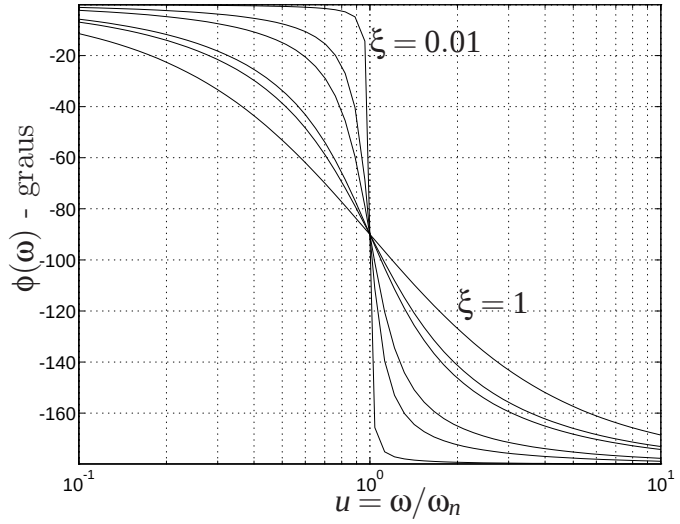
Ângulo de fase $\rightarrow \mp 180^o$

A interseção das assíntotas ocorre em $\omega/\omega_n = 1$

O Diagrama de Bode de um fator quadrático devido a um par de pólos complexos conjugados é mostrado na Fig. 9.



(a)



(b)

Figura 9: Diagrama de Magnitude (a) e de Fase (b) para $\left[1 + (2\xi/\omega_n)j\omega + (j\omega/\omega_n)^2\right]^{-1}$.

Para um par de pólos complexos conjugados, o valor máximo da resposta em

freqüência M_p ocorre na freqüência de ressonância ω_r, onde

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}, \quad M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad \text{válidos para } \xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \tag{11}$$

2.1.1 Traçado dos diagramas de Bode: exemplo

Seja a função de transferência

$$G(j\omega) = \frac{5(1+j0.1\omega)}{j\omega(1+j0.5\omega)\left[1+j0.6(\omega/50)+(j\omega/50)^2\right]}$$

Os seguintes fatores podem ser identificados:

a) Um ganho constante $K = 5$.

b) Um pólo na origem.

c) Um pólo em $s = -2$.

d) Um zero em $s = -10$.

e) Um par de pólos complexos conjugados com $\omega_n = 50$ e $\xi = 0.3$.

Primeiramente, desenhe os ganhos logarítmicos de cada fator conforme a Fig. 10.

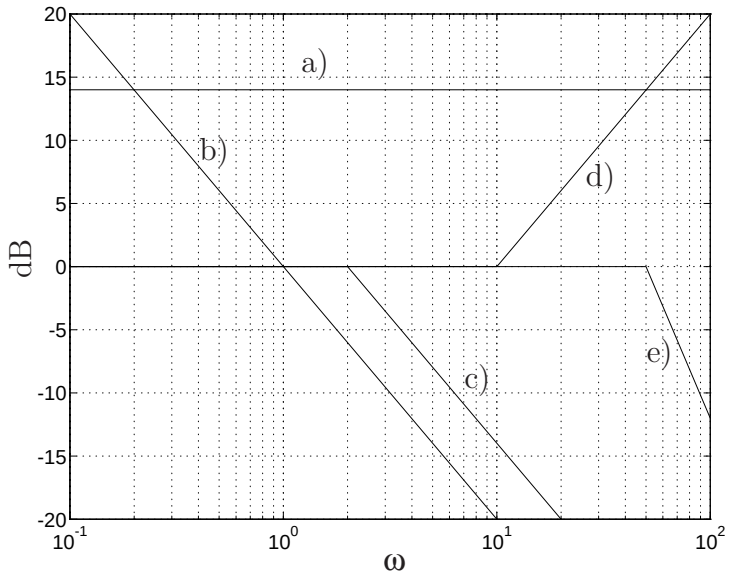


Figura 10: Ganhos Assíntóticos dos pólos e zeros.

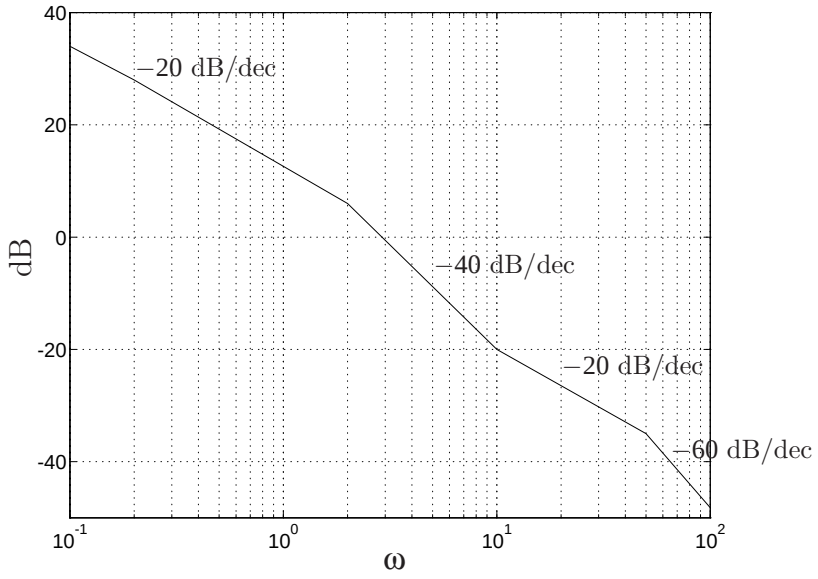


Figura 11: Ganho assintótico.

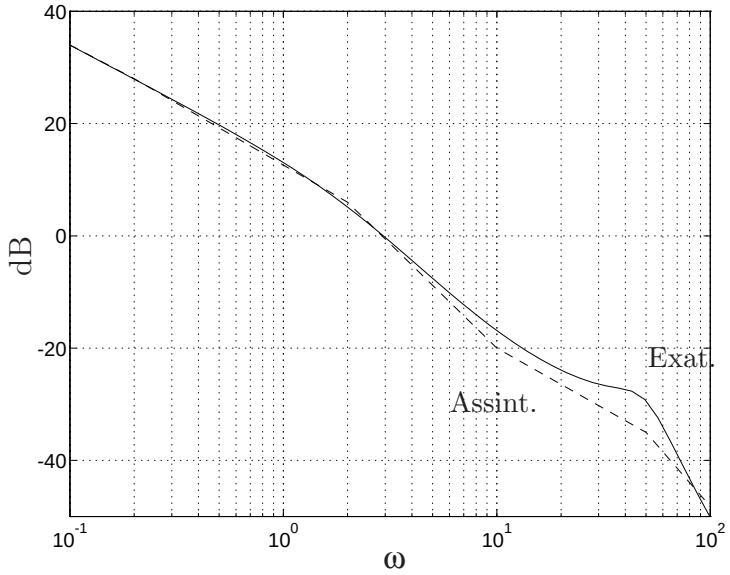


Figura 12: Ganhos assintótico e exato.

O ganho de magnitude assintótico total é obtido adicionando-se os diversos ganhos individuais (Figs. 11 e 12).

As características de fase de cada fator, assim como a fase total (obtida a partir da soma das fases de cada fator), são mostradas na Fig. 13.

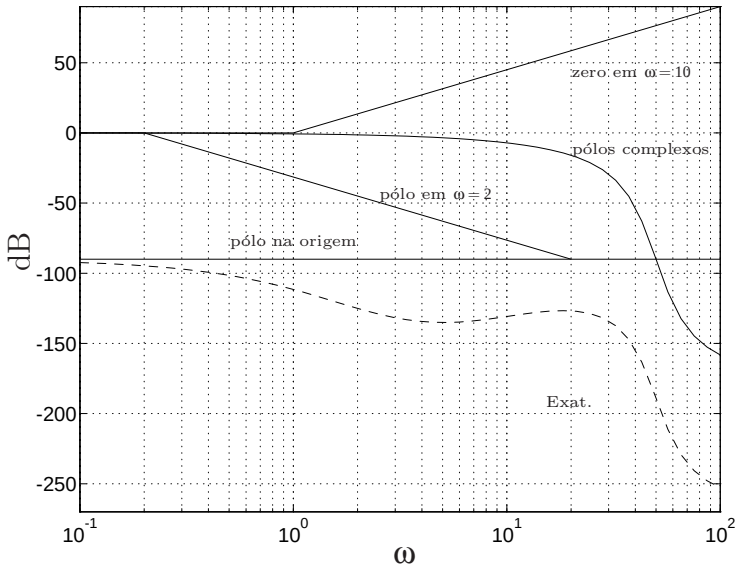


Figura 13: Característica da Fase.

Referências

[1] Ogata, K., *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice-Hall do Brasil, 1993.

Roteiro

1. Obtenha graficamente a resposta em freqüência do sistema

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \omega_n^2 u(t)$$

Faça um programa Matlab de forma a traçar os diagramas de resposta em freqüência para diferentes valores do fator de amortecimento ξ e freqüência natural de oscilação ω_n.

Considere as rotinas Matlab:

- `tf` cria função de transferência:

  `g=tf([5 0],[1 3 2])` cria a f.t. $G(s) = \dfrac{5s}{s^2+3s+2}$.

- `bode` plota os diagramas de módulo e fase.

  `bode(g)` ou `bode(g,{w1,w2})` com `w1` e `w2` em [rad/s].

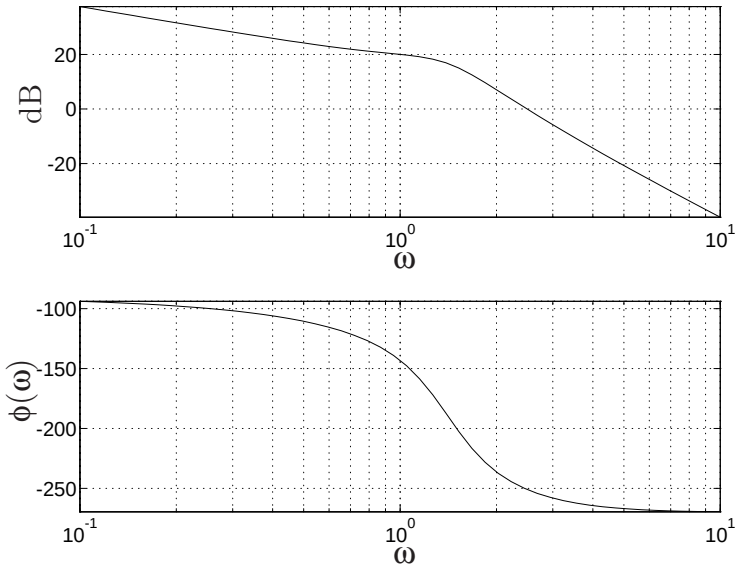


Figura 14: Diagramas de módulo e fase.

- Considere ainda:
  `for` para criar a variação do parâmetro desejado;
  `plot`, `hold on`, `clf` e `figure(n)` para manipulação das figuras.

Plote através dos comandos de manipulação de figuras todas as respostas na mesma figura para os casos

a) $\omega_n = 2$ e ξ variando na forma `0.05:0.35:2`

b) $\xi = 0.1$ e ω_n e variando na forma `1:0.5:4`

Responda então aos seguintes itens.

(a) Os comportamentos obtidos são compatíveis com os esperados teoricamente

(b) Compare a freqüência de ressonância (ω_r) e o pico de ressonância (M_p) obtidos graficamente no caso $\xi = 0.4$, com os valores teóricos de ω_r e M_p indicados em (11).

2. Identifique o sistema cujos Diagramas de Bode são dados na Fig. 14.

3. Considerando a planta ECP escolhida, trace os diagramas de Bode correspondentes para as funções de transferências das configurações indicadas a seguir. Utilize os valores numéricos obtidos pelo grupo na experiência de resposta temporal (experiência 5).

Emulador (G_1) Disco de carga sem massa. (G_2) Discos acoplados com as polias $n_{pd} = 24$ e $n_{pl} = 36$.

$$G_1(s) = \frac{k_{\text{amp}} k_t k_e}{s(J_{dd} s + c_1)}, \qquad G_2(s) = \frac{k_{\text{amp}} k_t k_e}{s(J_d^* s + c_d^*)}$$

com

$$J_d^* = J_{dd} + \frac{J_{pi}}{(g_r')^2} + \frac{J_{d\ell}}{(g_r)^2}, \qquad c_d^* = c_1 + \frac{c_2}{g_r^2}$$ [2]

Note que $k_{\text{amp}} k_t k_e = k_{hw}/k_s k_c$.

Retilíneo (G_1) Carro #1 sem massa com a mola média. (G_2) Carro #2 sem massa com a mola média.

$$G_i(s) = \frac{k_{\text{amp}} k_t k_e k_{mp} k_{ep}}{m_i s^2 + c_i s + k_i}$$

$i = 1, 2$. Note que $k_{\text{amp}} k_t k_e k_{mp} k_{ep} = k_{hw}/k_s k_c$.

Torcional (G_1) Disco#1 sem massa. (G_3) Disco#3 sem massa.

$$G_i(s) = \frac{k_{\text{amp}} k_t k_e k_p}{J_i s^2 + c_i s + k_i}$$

$i = 1, 3$. Note que $k_{\text{amp}} k_t k_e k_p = k_{hw}/k_s k_c$.

Pêndulo (G_1) Haste deslizante sem pesos "orelha", haste principal travada. (G_2) Função de transferência $\Theta(s)/X(s)$ entre as hastes principal e deslizante, em dois casos $\ell_t = 10$[cm] ($\ell_{w2} = -13,75$[cm]) e $\ell_t = 11$[cm] ($\ell_{w2} = -14,75$[cm]).

$$G_1(s) = \frac{k_f k_x}{s(m_{1o} s + c_1)}, \qquad G_2(s) = -\frac{k_f k_a m_1 (\ell_0 s^2 - g)}{J^* s^2 - g(m_1 \ell_0 + m_2 \ell_c)}$$

Levitador ($G_1(s)$) Disco e bobina #1 com compensação das não-linearidades do medidor e da força magnética.

$$G_1(s) = \frac{k_{hw}}{s(m_1 s + c_1)}$$

Note que $k_{hw} = 100$.

[2] Como c_2 não foi medido adote o valor $c_2 = 0.05$ N-s/m.

Tabela 1: Elementos de Ganho do Sistema.

Elemento	Função de Transferência	Valor
Encoder	$G_e(s) = k_e$	$\frac{16.000}{2\pi}$ (Count/Rad.)
Conversão de Pulsos	$G_s(s) = k_s$	32 (DACcount/Count)
Conversor DA	$G_c(s) = k_c$	$\frac{10}{32.768}$ (Volt/DACcount)
Amplificador Servo	$G_a(s) = k_{\text{amp}}$	$\star$ (Ampère/Volt)
Motor	$G_t = k_t$	$\star$ (Newton-m/Ampère)

$\star$ O produto $k_{\text{amp}}k_t$ foi medido na experiência 5.

Tabela 2: Ganhos para o Pêndulo Invertido

Elemento	Função de Transferência	Valor
Ganho combinado: CAD/Amplificador/Motor/Roldana	$G_f(s) = k_f$	0,0013 (N/DACcount)
Encoder da Haste Deslizante	$G_x(s) = k_x$	50.200 (Counts/m)
Encoder da Haste Principal	$G_a(s) = k_a$	2.546 (Counts/rad)
Conversão de Pulsos	$G_s(s) = k_s$	32 (DACcount/Counts)